

# El principio de inducción matemática

Elkin Rincón

14 de marzo de 2023

## 1. Introducción

*Para poder empezar a hablar sobre el principio de inducción matemática debemos, remontarnos a la siguiente pregunta: ¿Qué son los números naturales? Aquello que nos permite dar una respuesta a esta pregunta son los axiomas de Peano, realizaremos una breve descripción de estos y posteriormente daremos el enfoque inicial sobre el uso de los mismos en el principio primeramente mencionado.*

## 2. Los axiomas de Peano

**Axioma 1:** El 0 es un número natural.

**Axioma 2:** Para todo número natural  $n$ , existe  $S(n) \in \mathbb{N} \mid S(n)$  sucesor de  $n$ .

**Axioma 3:** El 0 no es sucesor de ningún número natural.

**Axioma 4:** Si  $S(n) = S(m)$ , entonces  $n = m$ .

**Axioma 5:** Si  $P$  es una propiedad sobre  $n$  y se cumple:

\*  $P(0)$ .

\*  $P(n) \Rightarrow P(S(n))$ .

Con  $P(n)$  damos a entender que  $n$  cumple la propiedad  $P$  y por ende, si  $n$  cumple la propiedad  $P$ , el sucesor de  $n$  también cumplirá la propiedad  $P$ .

## 3. Principio de inducción matemática

Para entender el fundamento de este principio, es de vital importancia haber entendido los axiomas de Peano ya mencionados, pero en específico el último. Habíamos visto que si  $P$  es una propiedad sobre  $\mathbb{N}$  y:

I.  $P(0)$

II. Si  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

**Entonces todos los números naturales cumplen la propiedad  $P$ .**

#### 4. Ejemplo con el principio de inducción matemática

Demostrar usando inducción matemática que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

I. Verificar que para  $P(0)$  se cumple:

$$\sum_{i=0}^0 i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$$

II. Realizaremos la hipótesis de que  $P(n)$  se cumple:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

III. Demostrar que  $P(n+1)$  es verdadera, es decir:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

IV. Demostrar esto último:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = 0+1+2+3+4+\dots+n+(n+1) = \left( \sum_{i=0}^n i \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$\frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

I.  $P(0)$

II. Si  $P(n)$ , entonces  $P(n+1)$

Entonces por el principio de inducción matemática comprobamos que  $P(n)$  es verdadera para todos los números naturales.