

Caos en el péndulo doble

Nicolas Fernandez Cinquepalmi*
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Lima, Perú

David Leonardo Ramos Salamanca**
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia

Mayo de 2021

Índice

1. Introducción	2
2. Marco Teórico	2
2.1. Dinámica No Lineal y Caos Determinista	2
2.2. Espacio de Fase	3
2.3. Estabilidad Local y Exponente de Lyapunov	4
2.4. Ecuaciones de Movimiento para el Péndulo Doble	5
3. Metodología	6
3.1. Montaje Experimental	7
3.2. Toma de Datos	7
4. Resultados	10
4.1. Trayectorias θ vs t	10
4.2. Diagramas de Fase	12
4.3. Exponentes de Lyapunov	15
5. Conclusiones	17
6. Referencias	18
7. Anexos	18
7.1. Gráficas de Exponentes de Lyapunov para θ_1	19
7.2. Gráficas de Exponentes de Lyapunov para θ_2	20
7.3. Diagramas de Fase para θ_1	21
7.4. Diagramas de Fase para θ_2	22

*e-mail: nicolas.fernandez@unmsm.edu.pe

**e-mail: david2208450@correo.uis.edu.co

Resumen

El péndulo doble ha sido utilizado por mucho tiempo para ilustrar como se pueden obtener comportamientos caóticos en un sistema físico simple. En este trabajo realizamos un análisis experimental del péndulo doble, basado en el rastreo de la trayectoria de marcadores ubicados en cada péndulo. Observamos cómo para ciertas condiciones iniciales el sistema se comporta de manera errática. Además, ilustramos la sensibilidad de las trayectorias a pequeños cambios en las condiciones iniciales en este régimen errático. Calculamos el exponente de Lyapunov comparando la trayectoria de los péndulos en el espacio de fase, para condiciones iniciales muy similares. Finalmente, obtuvimos un exponente de Lyapunov positivo, lo cual soporta la hipótesis de que el péndulo doble es un sistema caótico.

1. Introducción

El movimiento caótico se caracteriza por ser extremadamente sensible a las condiciones iniciales. Esto significa que pequeñas separaciones entre dos condiciones iniciales cercanas serán amplificadas exponencialmente en el tiempo. El péndulo doble provee una simple aunque dramática demostración de este comportamiento. Un péndulo doble está compuesto de dos péndulos en donde el segundo cuelga del extremo del primero. A pesar de su simplicidad, exhibe un comportamiento completamente impredecible. En este trabajo mostraremos que el mecanismo subyacente de este comportamiento, es decir, el crecimiento exponencial, puede ser evaluado experimentalmente para el péndulo doble.

El presente trabajo se divide en el Marco Teórico 2, donde se enuncian los principales conceptos físicos relevantes al desarrollo del proyecto. En la sección de Metodología 3, se presentan los pasos que se siguieron para el avance del proyecto, desde la fase exploratoria de reconocimiento de herramientas computacionales y los datos, hasta la elección de los datos que mejor se ajustan a los objetivos del trabajo y la presentación de las estrategias computacionales usadas. Los resultados se presentan en la Sección 4 y finalmente las conclusiones en la Sección 5. Se incluye una sección de anexos en 7.

2. Marco Teórico

2.1. Dinámica No Lineal y Caos Determinista

La dinámica es la ciencia que estudia la variación en el tiempo de diferentes magnitudes, es decir, su movimiento. Básicamente existen tres tipos de movimientos: los estacionarios y de equilibrio; los periódicos y cuasi periódicos; y por último, los caóticos. Considerando en sentido amplio la noción de movimiento, es fácil de comprender que podamos encontrar sistemas dinámicos en cualquier disciplina científica. Es por ello por lo que se acostumbra a decir que una de las características de la dinámica no lineal sea su interdisciplinariedad, ya que con sus métodos podemos abordar el estudio de muchos fenómenos diferentes que evolucionan con el tiempo.

Usamos el término “no lineal” para contraponerlo lógicamente al término “lineal”, ya que la aproximación lineal es la que tradicionalmente se ha usado en la ciencia debido a su sencillez matemática. La aproximación lineal lleva implícito asumir propiedades tales como: (1) Proporcionalidad: pequeñas causas provocan pequeños efectos (2) Aditividad: el todo es igual a la suma de las partes

(3) Replicación: la misma acción en las mismas condiciones producen el mismo resultado y (4) Relaciones claras entre causa y efecto: basta conocer un poco acerca del comportamiento de un sistema para conocerlo por completo.

Sin embargo, cuando las relaciones de la naturaleza no son lineales nos lleva a situaciones muy diferentes. Una relación de proporcionalidad entre dos variables x e y , donde $y = kx$, indica una relación lineal. Por tanto, toda relación entre dos variables que no responde a una relación de proporcionalidad como la anterior será no lineal. Es fácil ver que lo más común es que un sistema dinámico sea no lineal.

Cuando existen relaciones de no linealidad, puede darse un comportamiento caótico que presenta las siguientes propiedades: (1) No hay proporcionalidad: pequeñas causas pueden provocar grandes efectos (2) Emergencia: no existe la aditividad, de modo que el todo es mayor que la suma de las partes (3) Dependencia sensible a las condiciones iniciales: lo que puede llevar a que nunca se pueda reproducir de modo exacto el mismo experimento; y por último (4) La no linealidad puede generar inestabilidades, discontinuidades e imprevisibilidad.

Posiblemente una de las ideas más profundas acerca de lo que se conoce como comportamiento caótico, sea la idea de dependencia sensible a las condiciones iniciales. Es decir, el comportamiento de un sistema caótico con dos condiciones iniciales muy similares difiere significativamente a medida que avanza el tiempo. Este hecho tiene consecuencias muy drásticas en la capacidad de predicción de un sistema.

Podemos definir el comportamiento caótico o el caos como un tipo de movimiento que se deriva de una dinámica temporal determinista de sistemas sencillos que de hecho pueden describirse en términos de pocas variables y cuyas características fundamentales son: (1) Ser irregular en el tiempo, y dado su carácter no lineal, por supuesto, no puede ser la superposición de movimientos periódicos, siendo de hecho de naturaleza aperiódica y acotada, (2) Ser imprevisible a largo plazo y muy sensible a las condiciones iniciales y (3) Ser complejo, pero ordenado en el espacio de las fases, presentando una geometría de naturaleza fractal. Si comparamos el movimiento caótico con el movimiento regular, podemos decir que el movimiento regular es repetitivo, periódico, previsible y con una geometría sencilla, mientras que el movimiento caótico es irregular, imprevisible y de una geometría complicada [1].

2.2. Espacio de Fase

La noción de espacio de fase se atribuye al físico americano Josiah Willard Gibbs (1839-1903), que fue uno de los pioneros de la teoría cinética y es también considerado uno de los padres fundadores de la mecánica estadística, término que también acuñó. El espacio de fase es un espacio que contiene todos los posibles estados de un sistema. En sistemas clásicos por ende, corresponde a todos los posibles valores de las coordenadas generalizadas y sus momentos conjugados. Este concepto juega un papel crucial en la dinámica no lineal y de su análisis podemos obtener mucha información sobre un sistema dinámico dado. Para sistemas caóticos, un gráfico del espacio de fase presenta complejas estructuras fractales cuyas consecuencias físicas se plasman en la incertidumbre a la hora de determinar el estado ulterior del sistema [1].

2.3. Estabilidad Local y Exponente de Lyapunov

Consideremos el espacio de fase asociado a una cierta dinámica autónoma. Cada punto de este espacio esta en correspondencia con una única trayectoria, la cual está parametrizada en el tiempo t . Sobre cualquier punto de esta curva nos preguntamos qué ocurre si nos desplazamos infinitesimalmente en una dirección no tangente. Al cabo de un incremento δt , la nueva trayectoria pudo haberse acercado o alejado a la inicial, lo cual da una medida del comportamiento de la estabilidad local. Consideremos un sistema genérico con dinámica

$$\frac{d}{dt}y = f(y).$$

La condición inicial $y_0 = y(t_0)$ define la curva γ_0 , es decir, $y(t_0, p_0)$. En el tiempo t_0 producimos la variación δy_0 y la nueva curva solución γ la expresamos como $y = y(t, p_0) + \delta y$, donde la variación δy esta definida por

$$\frac{d}{dt}\delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\gamma_0} \delta y,$$

e integrando la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{\delta y(t)}{\delta y(t_0)} = \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial y} dt \right).$$

Cuando los valores de t son próximos a t_0 , la variación se aproxima a

$$\frac{\delta y(t)}{\delta y(t_0)} = \exp \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{t_0} \delta t$$

Cuando $(\partial f / \partial y)_{t_0}$ es positivo, decimos que la solución $y(t, p_0)$ es localmente inestable en p_0 . Al contrario, si $(\partial f / \partial y)_{t_0}$ es negativo, entonces decimos que es localmente estable. Por tanto, para cada punto de la trayectoria hemos definido su estabilidad local. Es importante remarcar que dada una trayectoria, la misma puede ser totalmente estable, totalmente inestable, o a lo largo de ella, puede tener puntos estables y puntos inestables. Este concepto es fácilmente generalizable a dinámicas de orden superior.

Una segunda cuestión de interés en la teoría de sistemas dinámicos, consiste en determinar una medida de cuanto se separan a tiempo infinito diferentes trayectorias generadas con condiciones iniciales muy próximas y fundamentalmente establecer un parámetro que de este modo cuantifique el movimiento caótico. Como es sabido, uno de estos parámetros es el exponente de Lyapunov. Se define al exponente de Lyapunov por

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta y(t)}{\delta y(t_0)} \right|. \quad (1)$$

Para sistemas de orden superior, la definición del exponente es equivalente a la ya presentada y existen tantos exponentes como la dimensión del sistema. Es importante remarcar que los exponentes están asociados a cada curva y, en definitiva, a cada punto del espacio de fases. Así por ejemplo,

en un sistema de dimensión tres, si la dinámica es caótica, en el sentido de que su comportamiento asintótico es acotado (no constante ni periódico) entonces uno de los exponentes es positivo, el otro es nulo y el tercero es negativo. Si bien, la definición del exponente de Lyapunov es sumamente simple, desde el punto de vista del cálculo numérico plantea serias dificultades. Estas son debidas a la acumulación de errores de truncamiento del método de integración y los errores en la representación numérica. En muchos casos se producen fuertes errores en las soluciones numéricas y desbordamiento en el cálculo. Todo sumado, hace que en muchas ocasiones, la solución numérica obtenida tenga poco que ver con la real[2].

2.4. Ecuaciones de Movimiento para el Péndulo Doble

Comenzaremos con la cinemática del péndulo doble. Se muestra un pequeño esquema del problema a estudiar, del cual analizaremos en primera medida las posiciones iniciales de cada masa respecto a punto de soporte

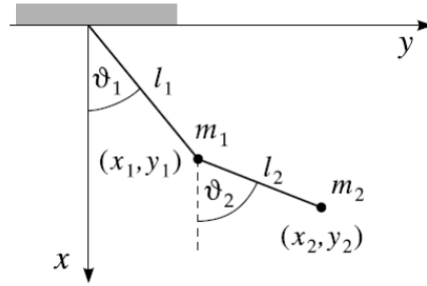


Figura 1: Diagrama ilustrativo del péndulo doble

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1 & y_1 &= -l_1 \cos \theta_1 \\ x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 & y_2 &= -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Derivando las posiciones respecto del tiempo, obtenemos las velocidades de ambas masas

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 & \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & \dot{y}_2 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

La energía cinética está dada por

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ K &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \end{aligned}$$

La energía potencial está dada por

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)$$

$$V = -(m_1 + m_2)g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

A continuación se obtiene la Lagrangiana como $L = K - V$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{l}_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{l}_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para $q_1 = \theta_1$ y $q_2 = \theta_2$ y trabajando algebraicamente, se tiene

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-g(2m_1 + m_2) \sin \theta_1 - m_2 g \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2 \sin(\theta_1 - \theta_2) m_2 (\dot{\theta}_2^2 l_2 + \dot{\theta}_1^2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{l_1(2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1^2 l_1 (m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2) \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{l_2(2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}$$

Sustituyendo $\dot{\theta}_i$ por ω_i , $\mu = 1 + m_1/m_2$ y $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ obtenemos las ecuaciones de movimiento para el péndulo doble

$$\dot{\omega}_1 = \frac{g(\sin \theta_2 \cos \Delta\theta - \mu \sin \theta_1) - \sin \Delta\theta (l_2 \omega_2^2 + l_1 \omega_1^2 \cos \Delta\theta)}{l_1(\mu - \cos^2 \Delta\theta)} \quad (2)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{g\mu(\sin \theta_1 \cos \Delta\theta - \sin \theta_2) - \sin \Delta\theta (\mu l_1 \omega_1^2 + l_2 \omega_2^2 \cos \Delta\theta)}{l_2(\mu - \cos^2 \Delta\theta)} \quad (3)$$

Finalmente, podemos realizar la simplificación para pequeñas amplitudes

$$\dot{\omega}_1 = \frac{g(\theta_2 - \mu\theta_1)}{l_1(\mu - 1)} \quad (4)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{g\mu(\theta_1 - \theta_2)}{l_2(\mu - 1)} \quad (5)$$

3. Metodología

Este trabajo tiene por objetivo principal estudiar el comportamiento caótico del péndulo doble de manera experimental. Como fue explicado en el Marco Teórico, este comportamiento caótico se evidencia como sensibilidad de la dinámica del sistema a pequeños cambios en las condiciones iniciales. Para estudiar este fenómeno experimentalmente, es necesario obtener los diagramas de fase para distintos lanzamientos del péndulo doble a aproximadamente la mismas condiciones iniciales (de esta manera las pequeñas modificaciones en las condiciones iniciales se debieron a nuestra incapacidad de ajustarlas de manera precisa).

Con estos diagramas de fase, la evolución del exponente de Lyapunov para cada intervalo de tiempo y su valor medio a lo largo de todo cada ensayo analizado, puede ser calculado.

3.1. Montaje Experimental

La construcción del péndulo doble estuvo a cargo del Ingeniero Darwin Ismael Mendez Jimenez¹. Las características geométricas y físicas de los péndulos se presentan a continuación

Brazo N ^o	Longitud (mm)	Masa (g)
1	235	650
2	200	330

Tabla 1: Valores de los parámetros geométricos para ambos péndulos

El montaje experimental fue realizado por el Dr. Werner Bramer Escamilla², colocando marcas de colores en los puntos necesarios para realizar el estudio.

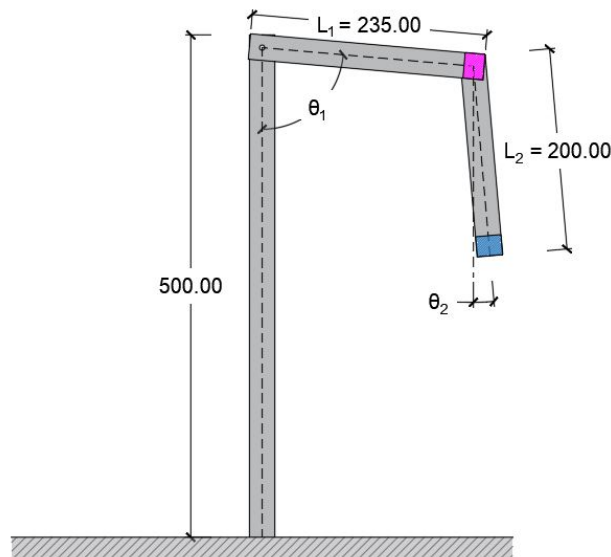


Figura 2: Esquema del Montaje Experimental

3.2. Toma de Datos

Los datos necesarios para realizar el análisis dinámico del péndulo doble fueron obtenidos usando el software "Tracker 5.1.5 Video Analysis and Modeling Tool"³, previa grabación de los experimentos. El procedimiento para la toma de datos se puede resumir de la siguiente manera: 1) cargar los videos dentro software, 2) escalar el modelo con los datos reales, 3) colocar los valores de las masas de cada péndulo, 4) identificar el instante de inicio del ensayo, 5) definir puntos a trackear y 6) correr el programa.

¹dimendez@yachaytech.edu.ec

²wbramer@yachaytech.edu.ec

³<https://physlets.org/tracker/>

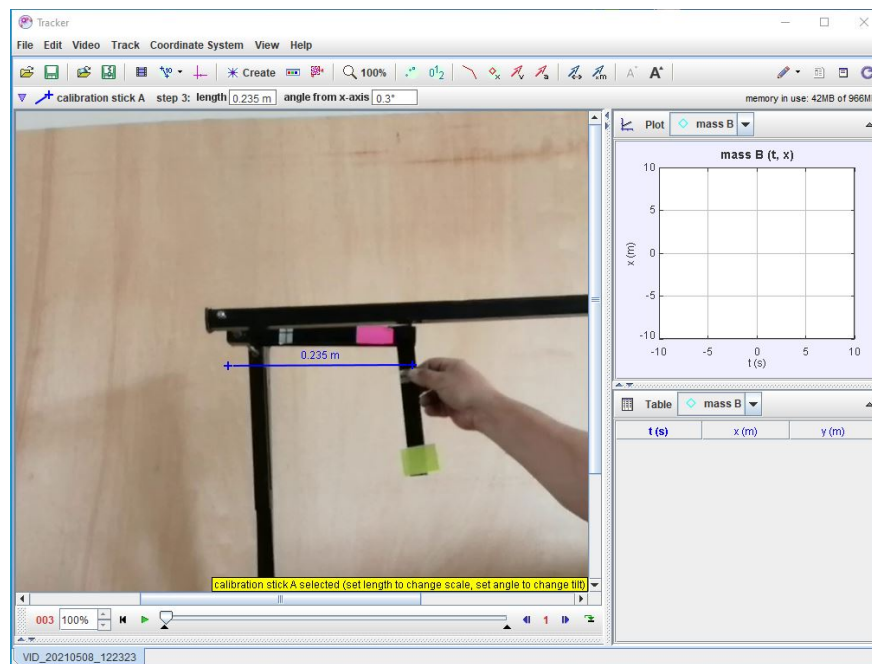


Figura 3: Escalado del Video

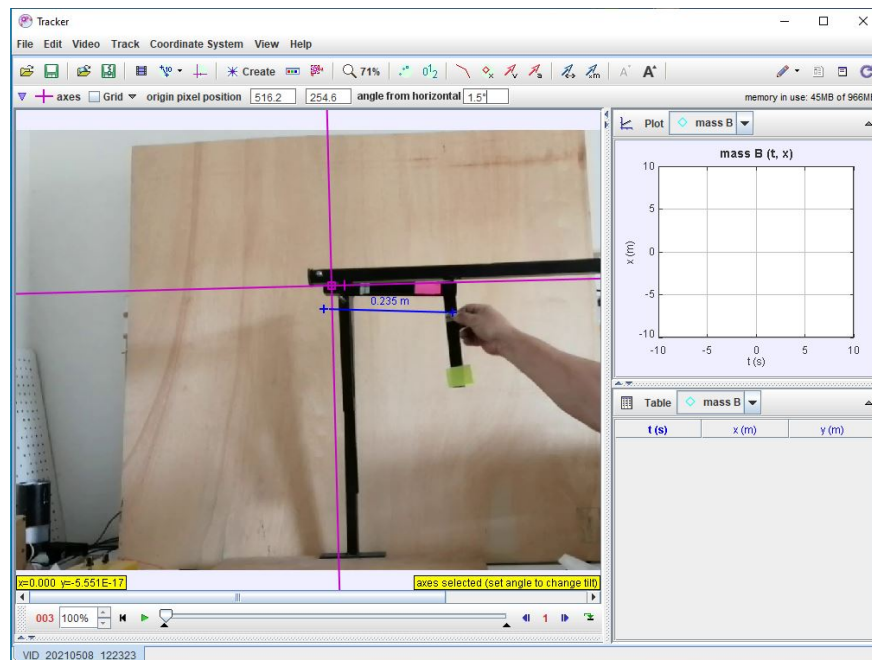


Figura 4: Ajuste de Ejes Coordinados

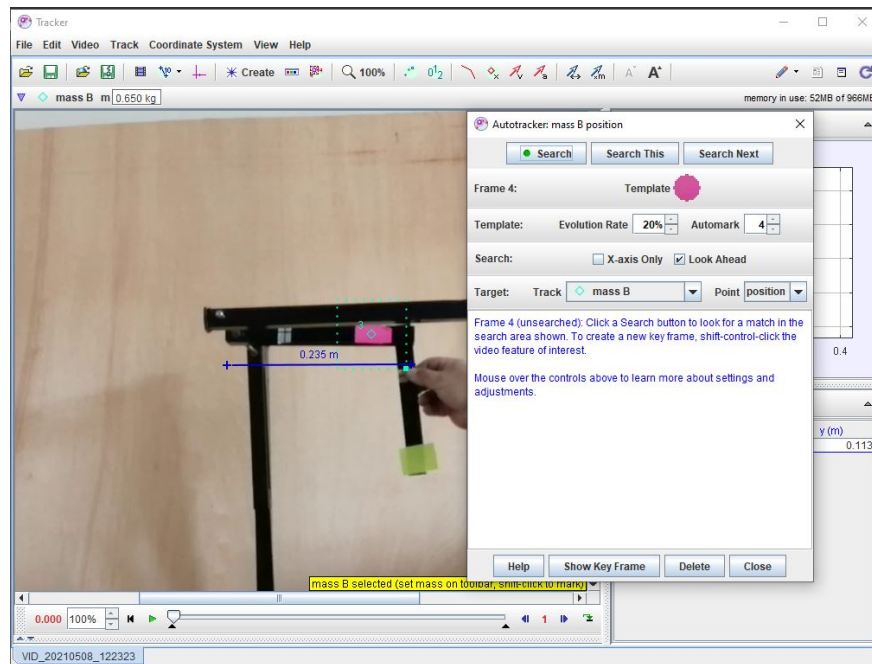


Figura 5: Elección de punto a trackear y Definición de masa

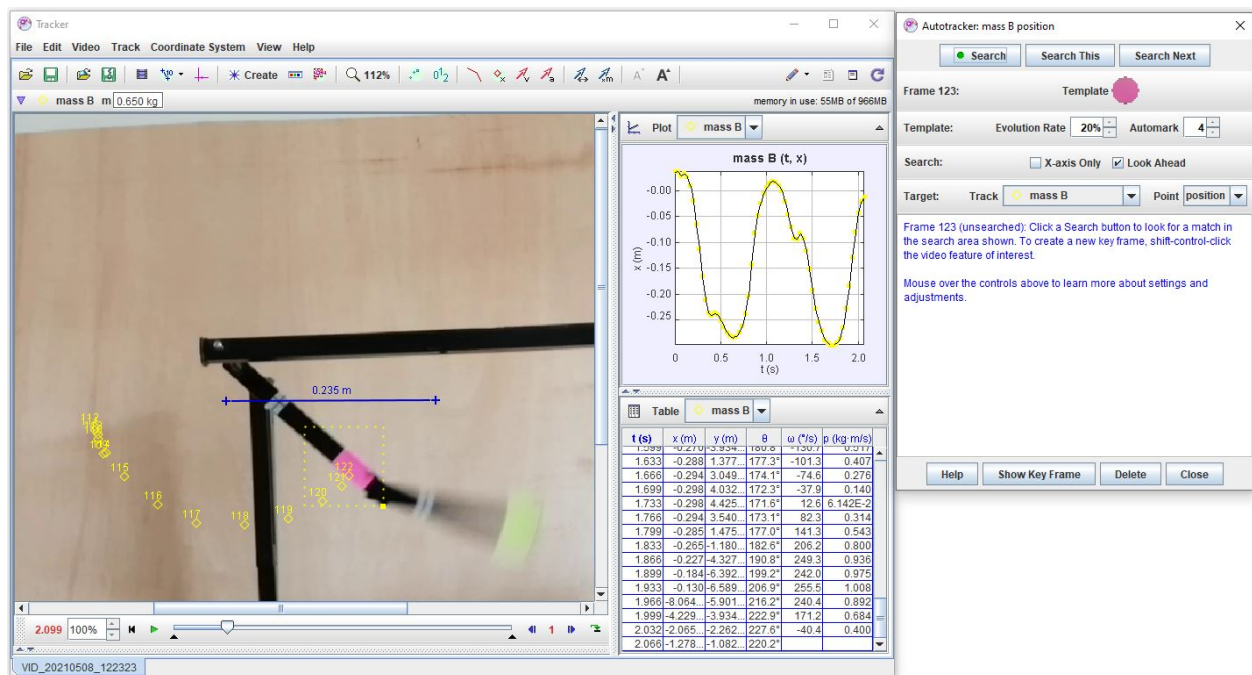


Figura 6: Trackeo y Toma de datos

Los datos brindados por el software son: tiempo (s), posición en x (m), posición en y (m), ángulo θ (deg), velocidad angular ω (deg/s) y momento lineal p (kg m/s).

t (s)	x (m)	y (m)	θ (deg)	ω (deg/s)	p (kg m/s)
0.00E+00	1.84E-01	-1.65E-02	-5.14E+00	0	0
3.33E-02	1.82E-01	-2.06E-02	-6.45E+00	-9.60E+01	2.07E-01
6.66E-02	1.74E-01	-3.56E-02	-1.15E+01	-1.95E+02	4.02E-01
9.99E-02	1.66E-01	-5.84E-02	-1.94E+01	-2.94E+02	5.92E-01
1.33E-01	1.53E-01	-9.23E-02	-3.11E+01	-4.04E+02	8.12E-01
1.67E-01	1.25E-01	-1.31E-01	-4.64E+01	-5.10E+02	1.03E+00
2.00E-01	7.64E-02	-1.65E-01	-6.51E+01	-5.43E+02	1.09E+00
2.33E-01	2.33E-02	-1.78E-01	-8.25E+01	-5.01E+02	9.99E-01
2.66E-01	-2.57E-02	-1.72E-01	-9.85E+01	-4.62E+02	9.21E-01
3.00E-01	-7.01E-02	-1.62E-01	-1.13E+02	-3.90E+02	7.74E-01
3.33E-01	-1.01E-01	-1.47E-01	-1.25E+02	-2.75E+02	5.58E-01
3.67E-01	-1.21E-01	-1.36E-01	-1.32E+02	-1.27E+02	2.63E-01
4.00E-01	-1.24E-01	-1.33E-01	-1.33E+02	1.76E+01	3.63E-02
4.33E-01	-1.18E-01	-1.38E-01	-1.30E+02	5.28E+00	1.45E-02
..
9.80E+00	1.06E-01	-1.40E-01	-5.30E+01	5.68E+01	1.17E-01
9.83E+00	1.09E-01	-1.40E-01	-5.19E+01	-3.35E+01	6.69E-02
9.86E+00	9.98E-02	-1.44E-01	-5.52E+01	-8.85E+01	1.79E-01
9.90E+00	9.29E-02	-1.48E-01	-5.78E+01	-1.04E+02	2.07E-01
9.93E+00	8.07E-02	-1.53E-01	-6.22E+01	-1.33E+02	2.62E-01
9.96E+00	6.79E-02	-1.58E-01	-6.67E+01	-1.55E+02	3.02E-01
1.00E+01	5.14E-02	-1.63E-01	-7.25E+01	-2.21E+02	4.29E-01
1.00E+01	2.55E-02	-1.69E-01	-8.14E+01	-3.25E+02	6.34E-01

Tabla 2: Ejemplo de Datos brindados por Tracker 5.1.5

Los trackeos se realizaron para un periodo de 10 segundos, para cada lanzamiento considerado. Por último, se utilizó Python en JupyterHub para analizar y graficar los datos.

4. Resultados

4.1. Trayectorias θ vs t

Se obtuvieron las gráficas para las trayectorias de θ_1 y θ_2 para las diferentes repeticiones del experimento. En las Figuras 7 y 8 se presentan las trayectorias para ángulos iniciales pequeños y para ángulos pronunciados respectivamente.

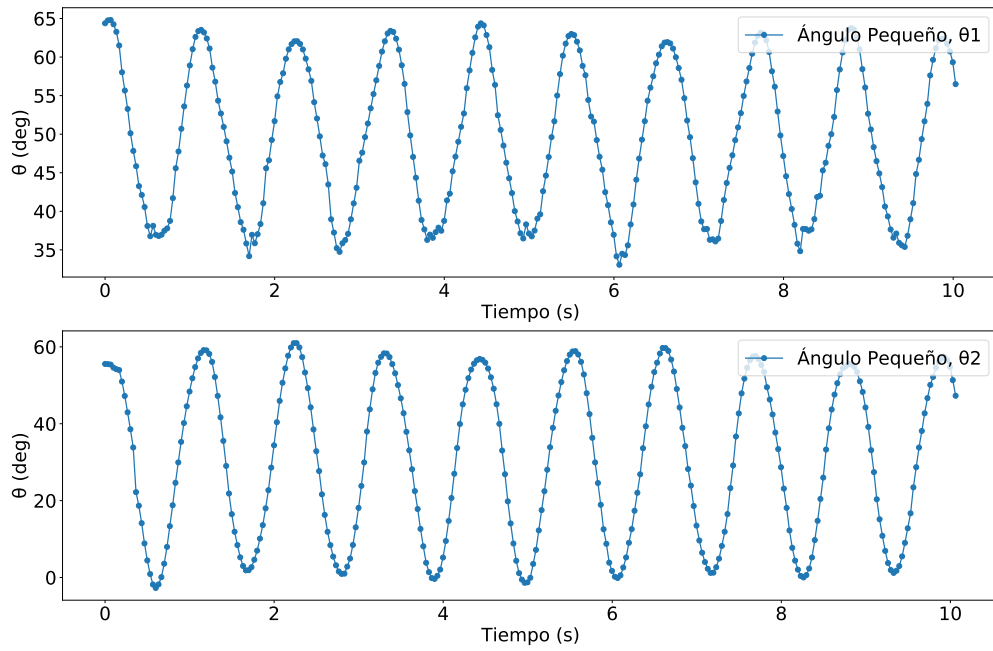


Figura 7: Trayectorias de θ_1 y θ_2 para pequeños ángulos

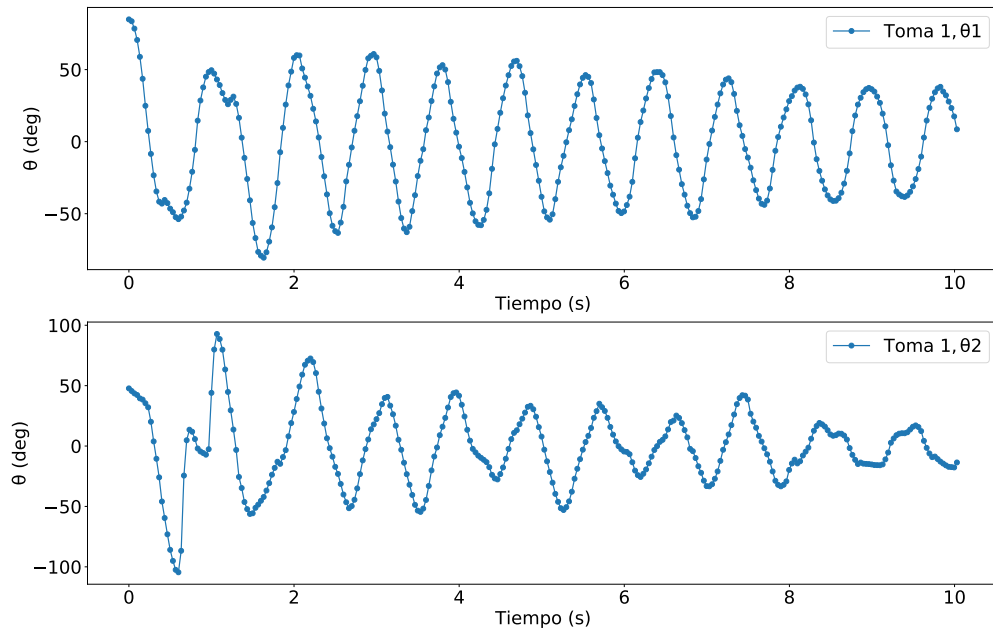


Figura 8: Trayectorias de θ_1 y θ_2 para ángulos grandes

Para el caso de pequeños ángulos, podemos observar que aunque el ángulo inicial fue de 25.62° ,

ambos péndulos describen un movimiento periódico armónico con amplitud aproximadamente constante. Como era de esperar, para ángulos grandes, se observa una trayectoria irregular y con grandes variaciones en la amplitud. Por último, realizamos una gráfica comparativa (Figura 9) para ambos casos a fin de observar las grandes diferencias entre las amplitudes.

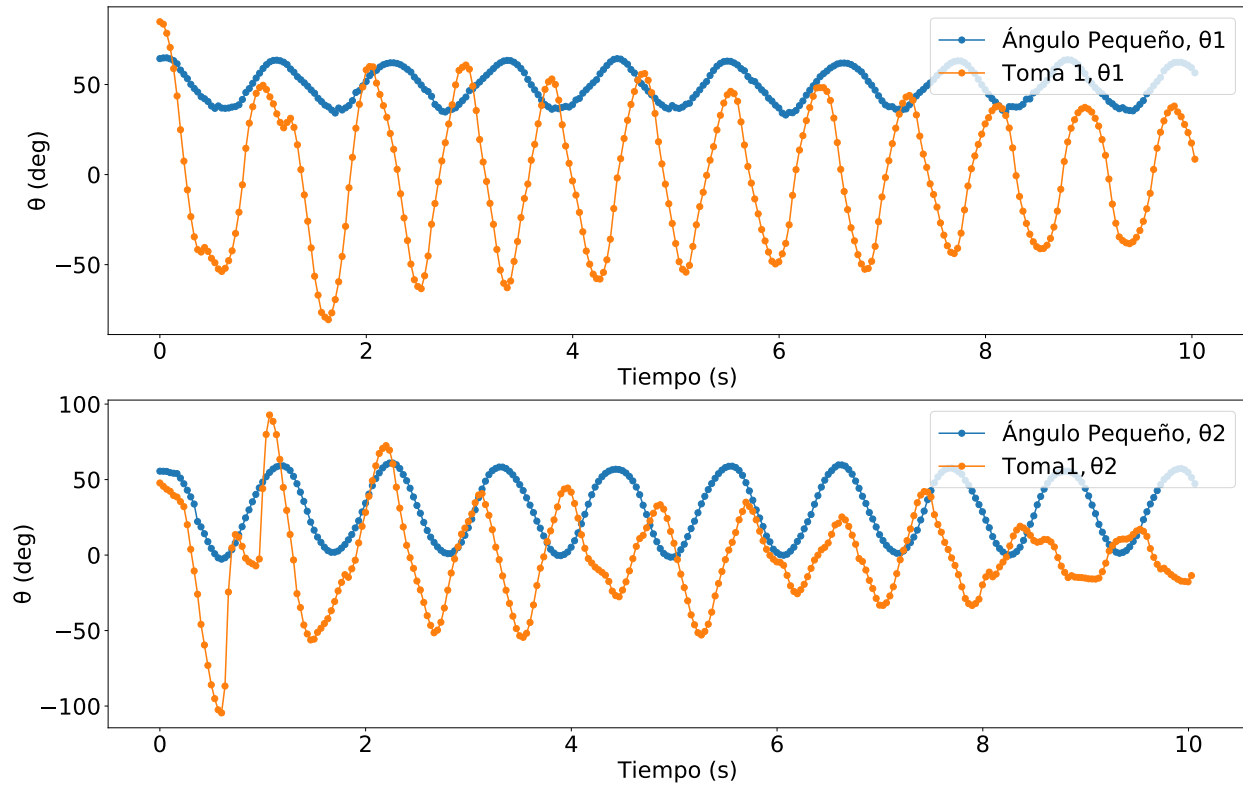


Figura 9: Comparativa θ_1 y θ_2 para ángulos pequeños y grandes

4.2. Diagramas de Fase

Se realizaron 5 lanzamientos con pequeñas modificaciones en las condiciones iniciales. Analizamos las variaciones en los diagramas de fase para cada lanzamiento y para cada ángulo. Se muestran a continuación algunos de ellos.

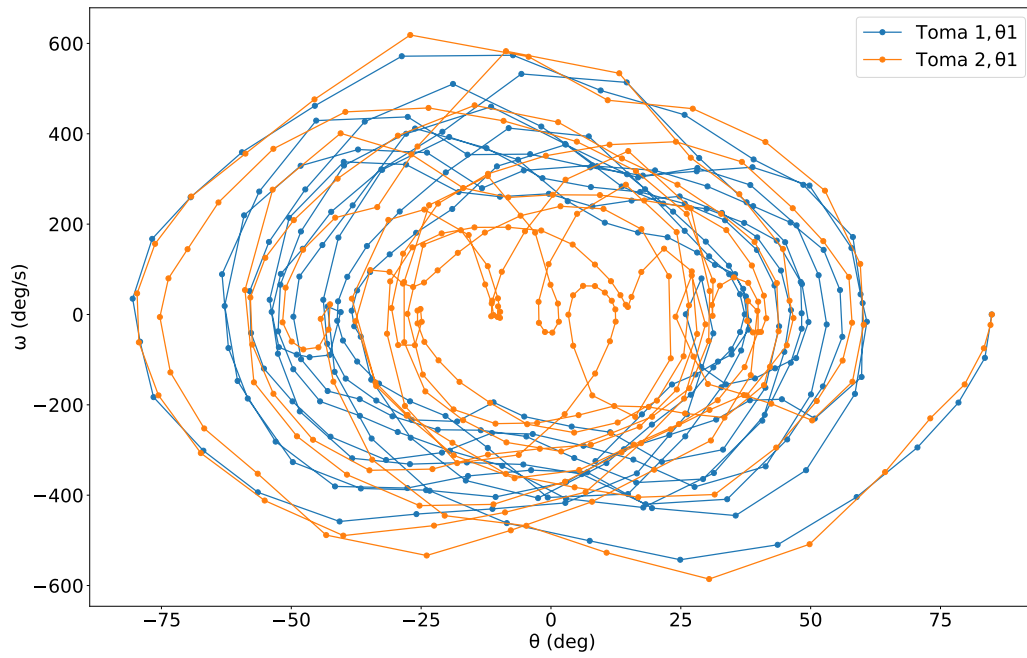


Figura 10: Diagrama de Fase para θ_1 , lanzamientos 1 y 2

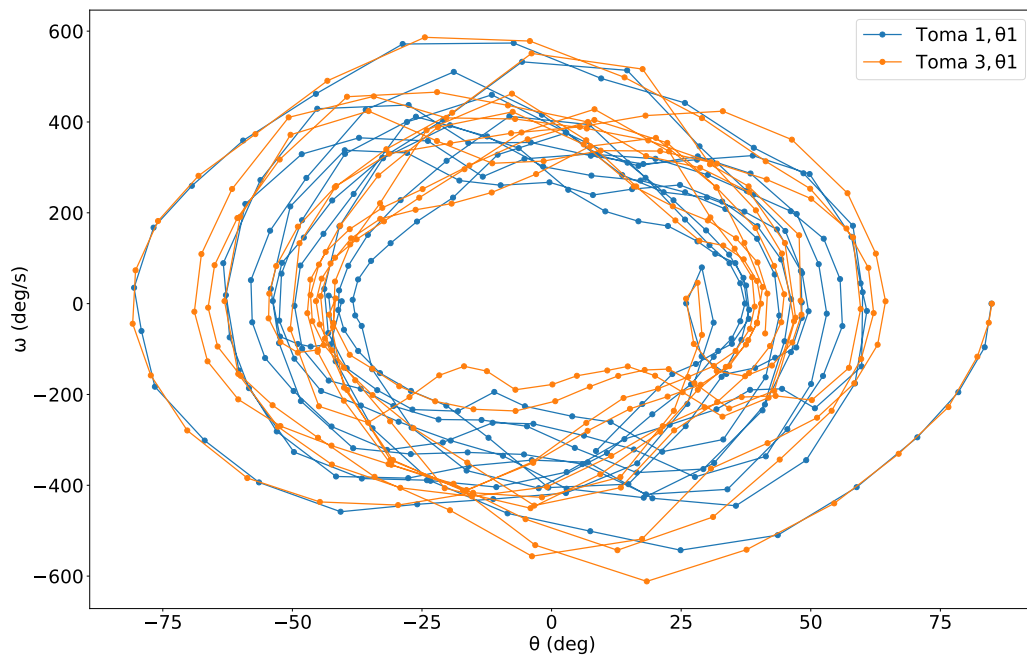


Figura 11: Diagrama de Fase para θ_1 , lanzamientos 1 y 3

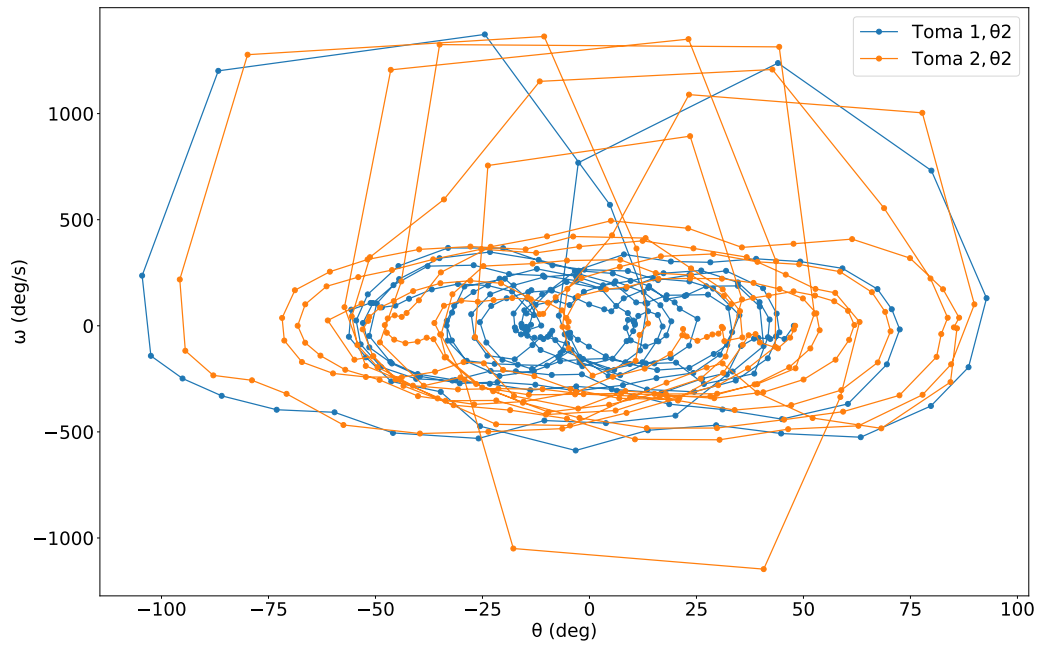


Figura 12: Diagrama de Fase para θ_2 , lanzamientos 1 y 2

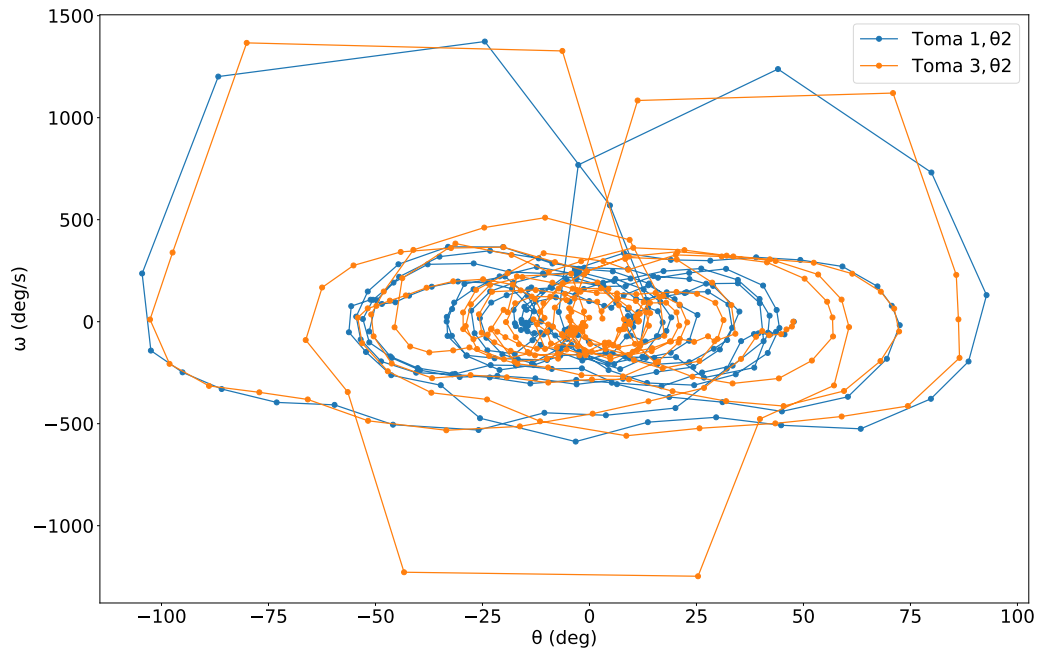


Figura 13: Diagrama de Fase para θ_2 , lanzamientos 1 y 3

Puede observarse que el diagrama cambia dramáticamente ante una pequeña variación en las condiciones iniciales. El cambio se amplifica notablemente para θ_2 debido a que el péndulo inferior puede rotar 360° con mayor facilidad que el péndulo superior. Por último, se muestra el diagrama de fase para el caso de pequeños ángulos

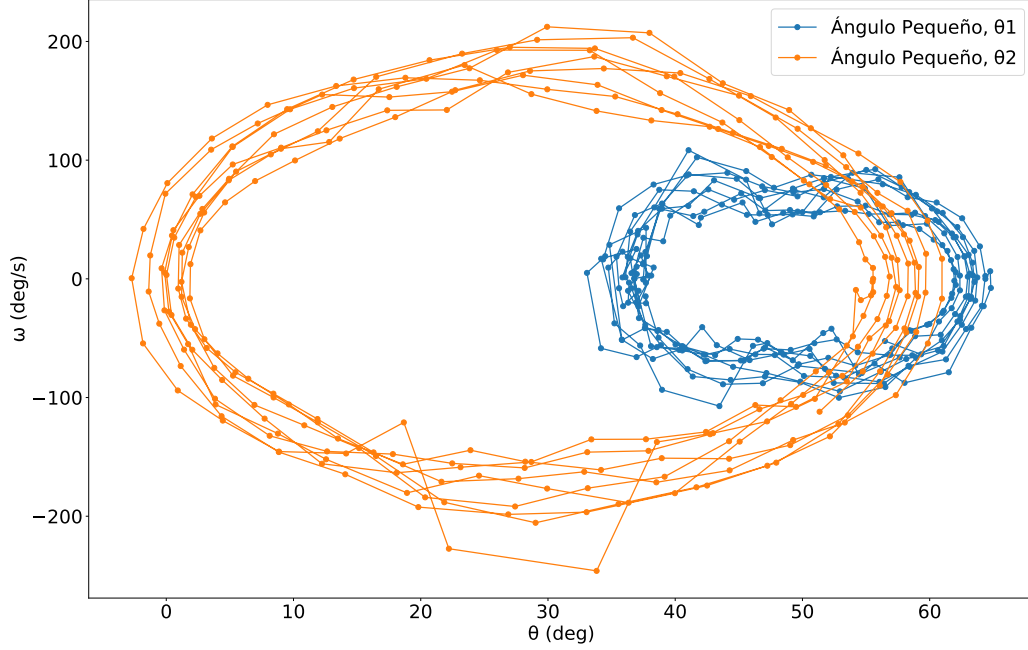


Figura 14: Diagrama de Fase para θ_1 y θ_2 , ángulos pequeños

Las pequeñas fluctuaciones que se observan en las elipses de la figura anterior, corresponden a que el ángulo inicial es un poco superior al sugerido por la teoría para pequeñas oscilación.

4.3. Exponentes de Lyapunov

Para calcular los exponentes de Lyapunov, se deben determinar las separaciones en el espacio de fases a un tiempo t como sugiere la siguiente expresión

$$\delta_i(t) = \sqrt{(\theta_i - \theta'_i)^2 + (\tau_i(\omega_i - \omega'_i))^2} \quad (6)$$

donde θ_i corresponde un lanzamiento y θ'_i a otro, de igual manera para ω_i y ω'_i . Además, multiplicamos la velocidad angular por el periodo $\tau_i = \sqrt{l_i/g}$, con el fin de regularizar las unidades. Las unidades de los ángulos se utilizan en radianes y las velocidades angulares en radianes/s. Mostramos a continuación la variación a lo largo del tiempo del exponente de Lyapunov, tanto para θ_1 como para θ_2

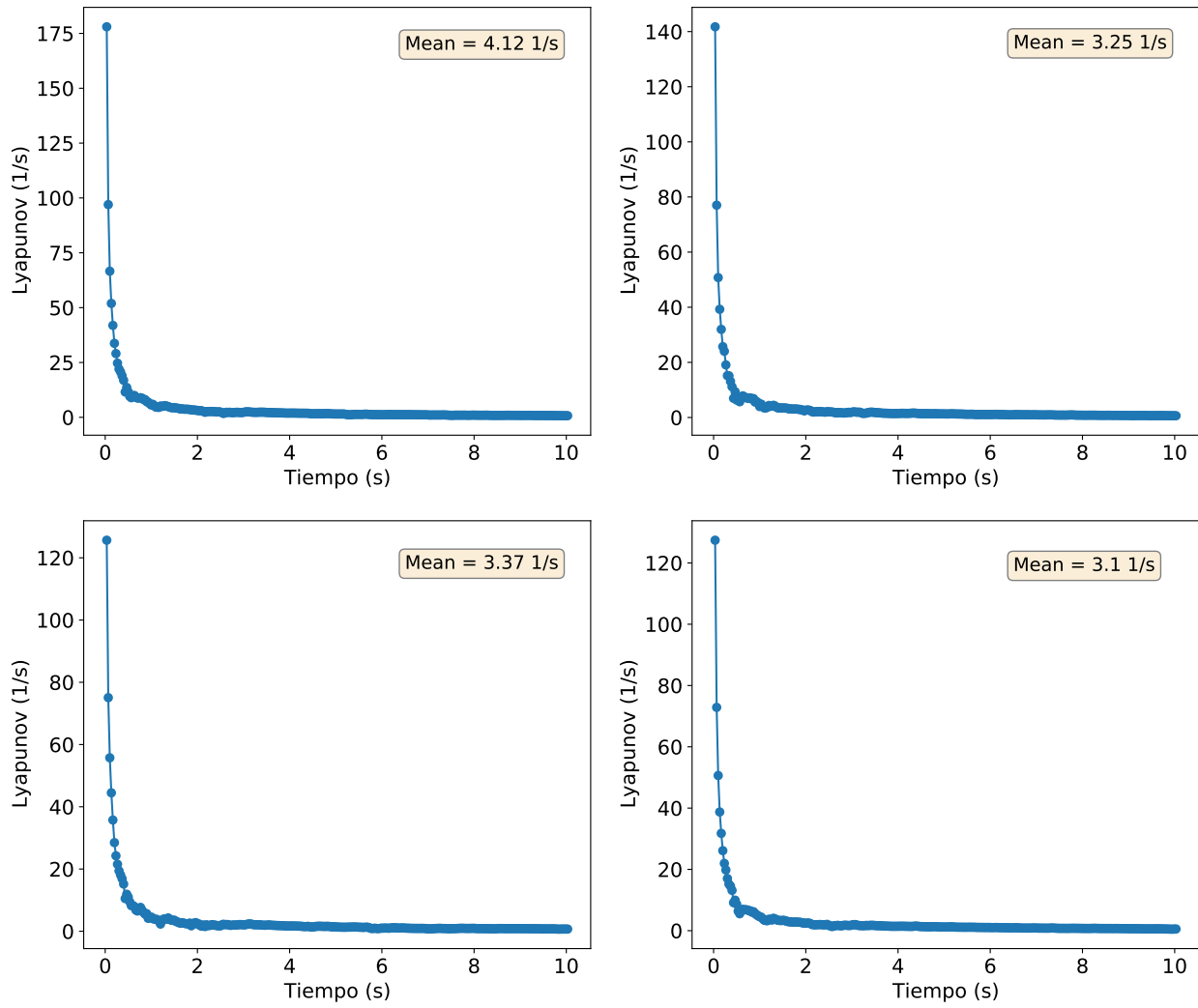


Figura 15: Fluctuación del exponente de Lyapunov para θ_1

Observamos que el exponente de Lyapunov para θ_1 varía erráticamente y decrece rápidamente en el tiempo hasta estabilizarse en un valor concreto entre cero y uno. El exponente es positivo, lo que induce a pensar en un comportamiento caótico, aunque no es condición suficiente para afirmarlo. Sucede lo mismo para θ_2 .

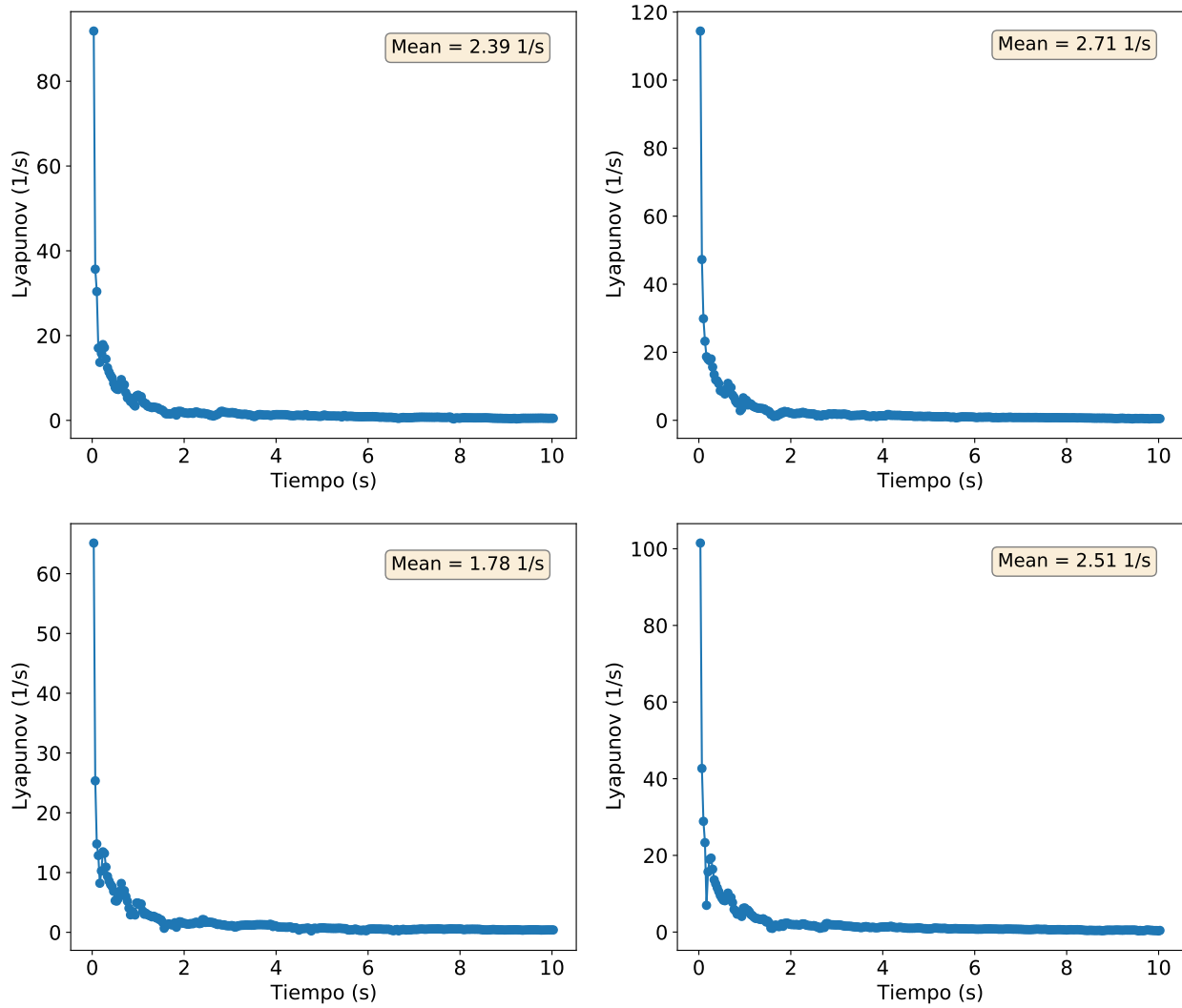


Figura 16: Fluctuación del exponente de Lyapunov para θ_2

5. Conclusiones

El péndulo doble es una simple, aunque dramática, demostración de la dinámica del caos. Las ecuaciones de movimiento derivadas, producen un par de ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas y altamente no lineales que anticipan su complejidad.

Las gráficas de las trayectorias en función del tiempo muestran la irregularidad del movimiento de un péndulo doble real. Además, los resultados para ángulos pequeños presentan trayectorias periódicas como anticipa la teoría.

En los diagramas de fase se muestra claramente la sensibilidad a las condiciones iniciales. Pe-

queñas variaciones generan trayectorias completamente diferentes en el espacio de fases, lo cual se puede observar fácilmente para el caso del ángulo θ_2 .

Los exponentes de Lyapunov resultaron ser positivos, comprobando que trayectorias muy cercanas divergirán exponencialmente una de la otra, de acuerdo con la observación de la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Finalmente, nuestros resultados presentan comportamientos en buen acuerdo con otros artículos publicados[3, 4, 5, 6, 7, 8]. Creemos que pueden realizarse numerosos estudios adicionales; uno de ellos podría ser cambiar los parámetros básicos del sistema y analizar si se obtienen efectos significativos en su comportamiento.

6. Referencias

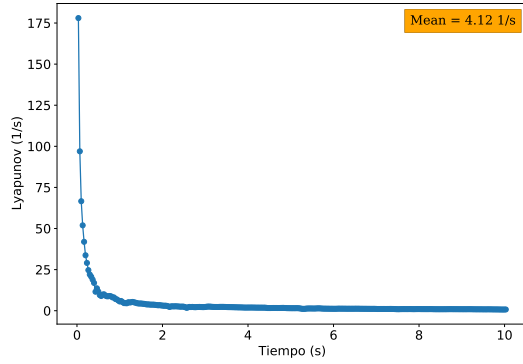
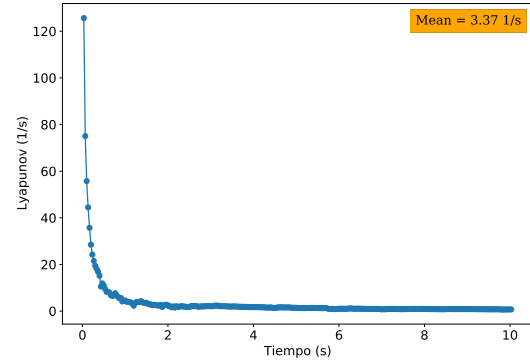
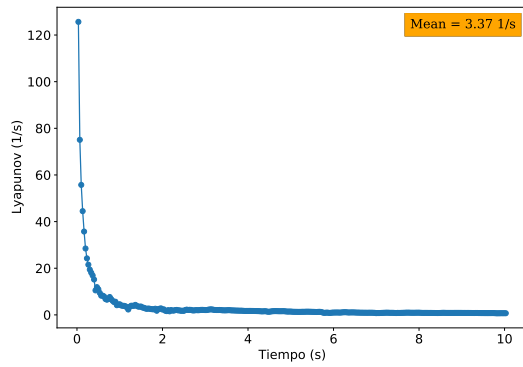
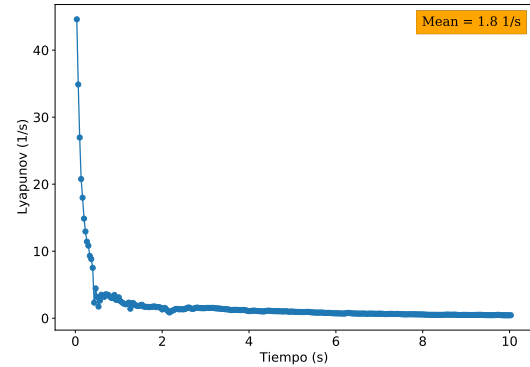
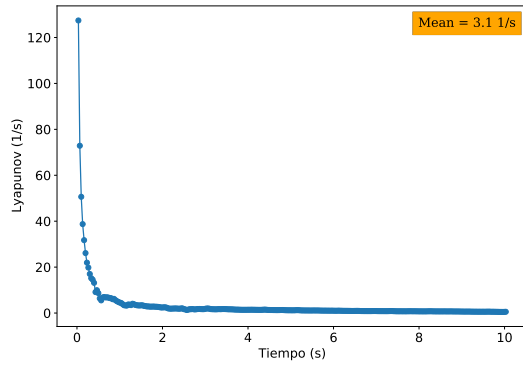
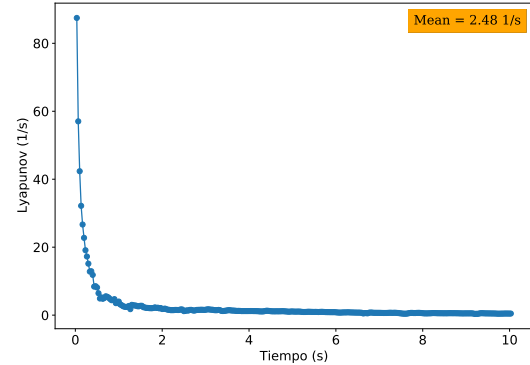
Referencias

- [1] Miguel Ángel Fernández Sanjuán. *Dinámica No Lineal, Teoría del Caos y Sistemas Complejos: una perspectiva histórica*. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 2016.
- [2] Rodrigo Machado Mario Castagnino Luis Lara, Cesar Stoico. *Estimación de los Exponentes de Lyapunov*. Instituto de Astronomía y Física del Espacio. Ciudad Universitaria, Buenos Aires, Argentina, 2005.
- [3] Toshio Okada Tomasz Stachowiak. *A numerical analysis of chaos in the double pendulum*. Elsevier Ltd, 2003.
- [4] Joe Chen. *Chaos from Simplicity: An Introduction to the Double Pendulum*. University of Canterbury, 2008.
- [5] Jack Wisdom James Yorke Troy Shinbrot, Celso Grebogi. *Chaos in a double pendulum*. University of Canterbury, 2008.
- [6] S. M. Tan R. B. Levien. *Double pendulum: An experiment in chaos*. American Journal of Physics, 1993.
- [7] Roberto Carlos Tapia De León. *Péndulo Doble*. 2015.
- [8] David Petrushenko Firas A. Khasawneh Audun D. Myers, Joshua R. Tempelman. *Low-cost double pendulum for hig-quality data collection with open-source video tracking and analysis*. Elsevier Ltd, 2020.

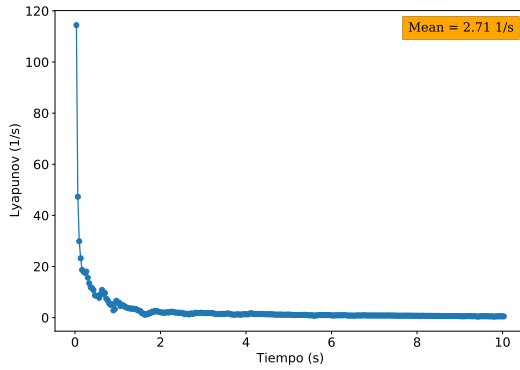
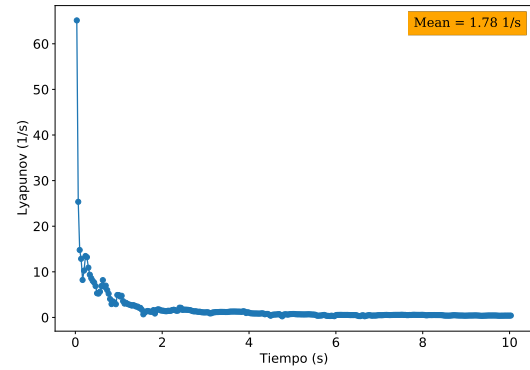
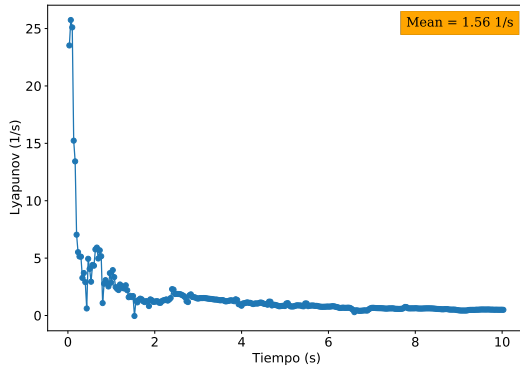
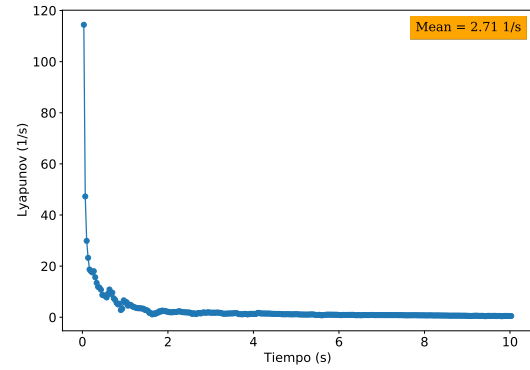
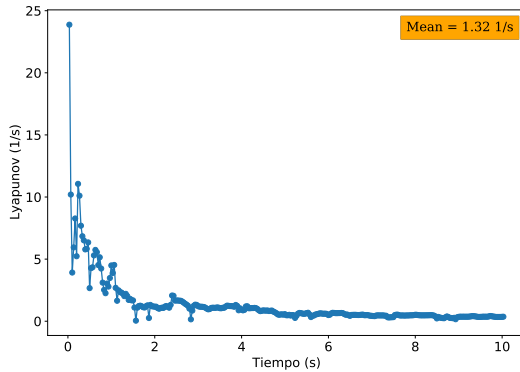
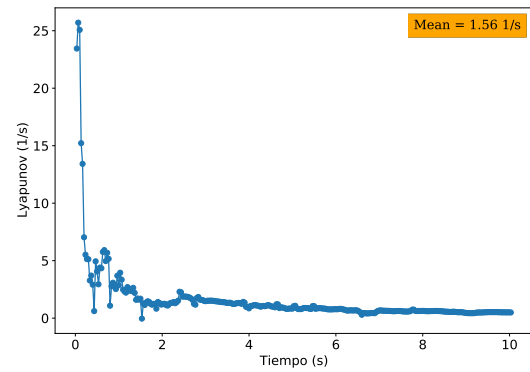
7. Anexos

Todas las gráficas se encuentran en https://gitmilab.redclara.net/martinezj/proyecto_materia_oscura

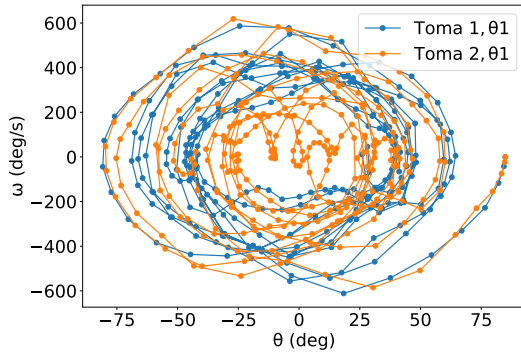
7.1. Gráficas de Exponentes de Lyapunov para θ_1

(a) Figura 15 para θ_1 (b) Figura 15 para θ_1 (c) Figura 15 para θ_1 (d) Figura 15 para θ_1 (e) Figura 15 para θ_1 (f) Figura 15 para θ_1 Figura 17: Gráficas de Exponentes de Lyapunov para θ_1

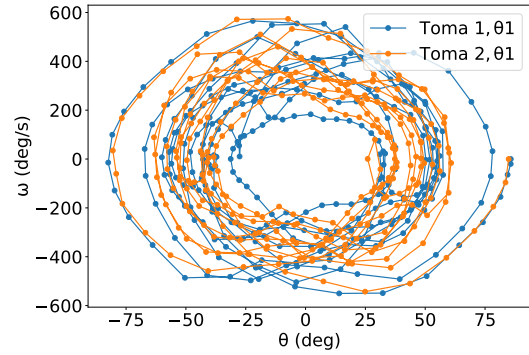
7.2. Gráficas de Exponentes de Lyapunov para θ_2

(a) Figura 16 para θ_2 (b) Figura ?? para θ_2 (c) Figura 16 para θ_2 (d) Figura 16 para θ_2 (e) Figura 16 para θ_2 (f) Figura 16 para θ_2 Figura 18: Gráficas de Exponentes de Lyapunov para θ_2

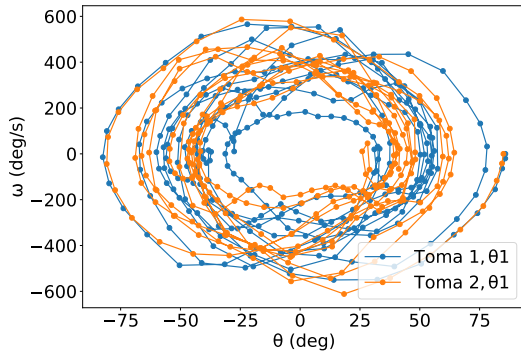
7.3. Diagramas de Fase para θ_1



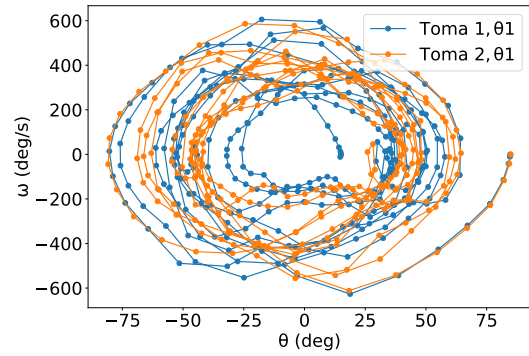
(a) Figura 10 para θ_1



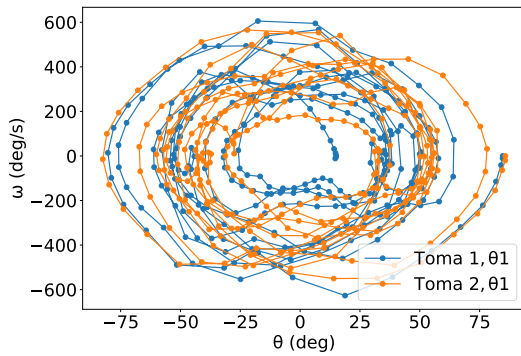
(b) Figura 10 para θ_1



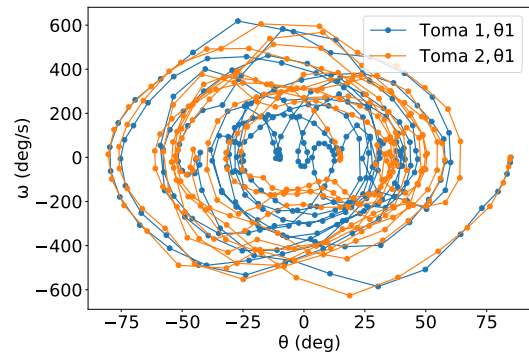
(c) Figura 10 para θ_1



(d) Figura 10 para θ_1



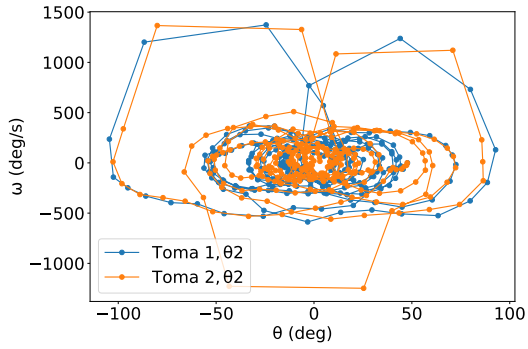
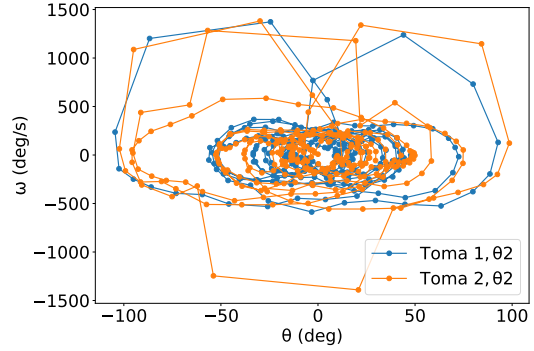
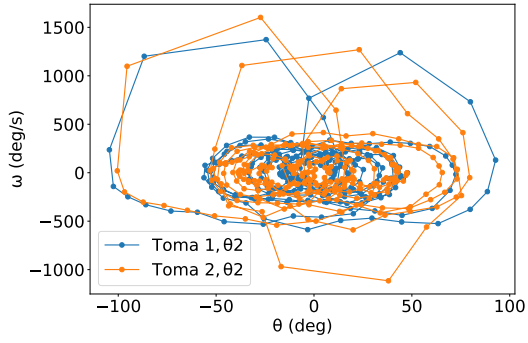
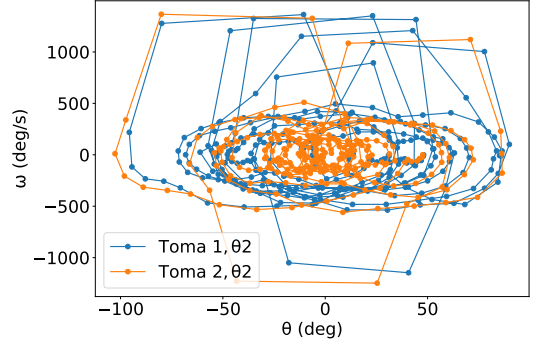
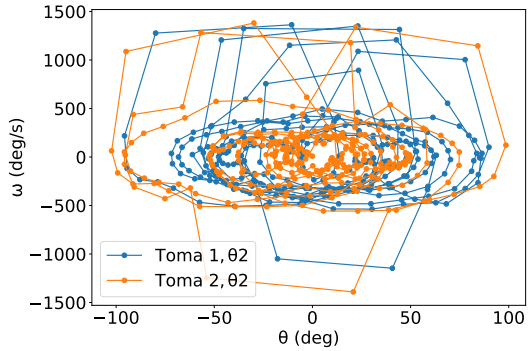
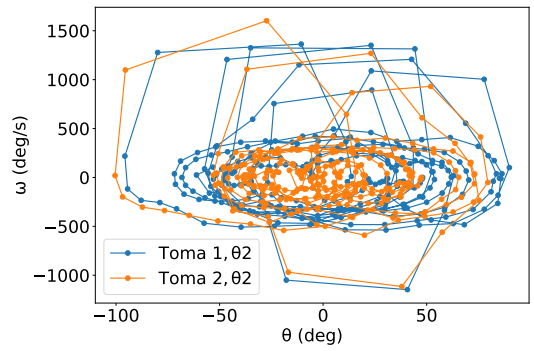
(e) Figura 10 para θ_1



(f) Figura 10 para θ_1

Figura 19: Gráficas de Diagramas de Fase para θ_1

7.4. Diagramas de Fase para θ_2

(a) Figura 11 para θ_2 (b) Figura 11 para θ_2 (c) Figura 11 para θ_2 (d) Figura 11 para θ_2 (e) Figura 11 para θ_2 (f) Figura 11 para θ_2 Figura 20: Gráficas de Diagramas de Fase para θ_2