

# Campo de Dirac

José Antonio López Rodríguez

1 de marzo de 2021

# Índice general

<b>1. Campo de Dirac</b>	<b>2</b>
1.1. Sobre la representación de número en fermiones . . . . .	3
1.2. Sobre la representación de número para fermiones . . . . .	6
1.3. El Campo de Dirac . . . . .	7
<b>A. Glosario</b>	<b>8</b>

# Capítulo 1

## Campo de Dirac

El Campo de Dirac es el objeto más importante en la descripción de partículas de espín  $\frac{1}{2}$ , fermiones. Partículas que obedecen la estadística de Fermi-Dirac. El desarrollo de esta parte sigue la forma de las referencias [1, 2]

## 1.1. Sobre la representación de número en fermiones

Un detalle a resaltar en la cuantización de una teoría de bosones es que el sistema libre es una colección de osciladores armónicos.

Tenemos una serie de operadores de creación y destrucción de modos, etiquetados por estados, genéricamente  $r, s \dots$

$$\begin{aligned} [a_r, a_s^\dagger] &= \delta_{rs}, \\ [a_r, a_s] &= 0, \\ [a_r^\dagger, a_s^\dagger] &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

El operador de número del estado  $r$ ,

$$N_r \equiv a_r^\dagger a_r, \tag{1.2}$$

$$[N_r, a_s^\dagger] = \delta_{rs} a_r^\dagger = \delta_{rs} a_s^\dagger, \tag{1.3}$$

$$[N_r, a_s] = -\delta_{rs} a_r = -\delta_{rs} a_s, \tag{1.4}$$

cuenta el nivel (número de excitaciones o partículas) presentes en la configuración  $r$ . El operador  $a_r^\dagger$  agrega una partícula de configuración  $r$ . Al contrario, el operador  $a_r$  remueve una partícula.

Existe un estado de vacío  $|0\rangle$ ,

$$a_r|0\rangle = 0; \quad \forall r. \quad (1.5)$$

- El vacío es el estado sin excitaciones (partículas) (ecuación 1.5)
- El vacío tiene la mínima energía del sistema: cero en la prescripción de orden normal.

Como hemos dicho, los operadores  $a_r^\dagger$  permiten ir agregando grados de libertad de partícula libre, con números cuánticos definidos por la etiqueta  $r$  (4-momento lineal y espín) al estado sobre el cual actúan. En particular, podemos contabilizar que el nuevo estado ha modificado su 4-momento de conforme lo establecido en la etiqueta  $r$ .

Por ejemplo, si consideramos el siguiente estado (sin normalizar):

$$a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger |0\rangle \sim |\vec{p}, \vec{p}, \vec{p}'\rangle, \quad (1.6)$$

esperamos que represente un estado compuesto por 3 partículas libres. 2 de momento lineal  $\vec{p}$  y una de momento lineal  $\vec{p}'$ . Vamos a jurungar<sup>1</sup> un poco este estado, para convencernos y entender mejor la idea.

---

<sup>1</sup>tr. coloq. *R. Dom. y Ven.* hurgar [3]

Aplicando el operador  $N_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}$  nos queda:

$$\begin{aligned}
 N_{\vec{p}} |2\vec{p}, \vec{p}' > &\sim a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} |0 > \\
 &= a_{\vec{p}}^{\dagger} (a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}} + [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^{\dagger}]) a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} |0 > & ([a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^{\dagger}] = 1) \\
 &= a_{\vec{p}}^{\dagger} (a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}) a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} |0 > + a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} |0 > \\
 &= a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} (a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}} + [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^{\dagger}]) a_{\vec{p}}^{\dagger} |0 > + a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} |0 > \\
 &= a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} (a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}) a_{\vec{p}}^{\dagger} |0 > + 2a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} |0 > \\
 &= a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} (a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}} + [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^{\dagger}]) |0 > + 2a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} |0 > & ([a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^{\dagger}] = 0) \\
 &= a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} (a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}) |0 > + 2a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} |0 > & (a_{\vec{p}} |0 > = 0) \\
 &= 2a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} |0 > \\
 &\sim 2 |2\vec{p}, \vec{p}' > .
 \end{aligned}$$

El autovalor del operador número de partículas de momento lineal  $\vec{p}$  es 2. El estado contiene dos partículas de momento lineal  $\vec{p}$ .

Se puede obtener el mismo resultado usando las propiedades del operador de número (1.3 y 1.4). Probando para  $N_{\vec{p}}'$ ,

$$\begin{aligned}
 N_{\vec{p}} |2\vec{p}, \vec{p}' > &\sim N_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} |0 > & ([N_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^{\dagger}] = 0) \\
 &= a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} N_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^{\dagger} |0 > \\
 &= a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} (a_{\vec{p}}^{\dagger}, N_{\vec{p}} + [N_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^{\dagger}]) |0 > & ([N_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^{\dagger}] = a_{\vec{p}}^{\dagger}) \\
 &= a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} N_{\vec{p}} |0 > + a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} |0 > & (N_{\vec{p}} |0 > = 0) \\
 &= a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}^{\dagger} |0 > \\
 &\sim |2\vec{p}, \vec{p}' > .
 \end{aligned}$$

El autovalor del operador número de partículas de momento lineal  $\vec{p}'$  es 1. El estado contiene una partícula de momento lineal  $\vec{p}'$ .

## 1.2. Sobre la representación de número para fermiones

...

## 1.3. El Campo de Dirac

En la construcción de los ingredientes de una teoría de campos, la simetría de Poincaré juega un papel protagonista. La evidencia observacional y experimental accesible y que acumula nuestro conocimiento indica que esta simetría está presente a un nivel fundamental de la naturaleza y permite definir el conjunto de observadores inerciales.

Los campos son objetos que dan cuenta de los grados de libertad en cierto sistema físico. En una teoría física exitosa, la forma general de estos objetos es independiente del observador que describe el sistema. Además, las transformaciones de simetría que relacionan a dos observadores relacionan también los campos presentes en la descripción de cada observador, transformándolos de forma que se pueden verificar las observaciones en cada sistema.



# Apéndice A

## Glosario

- Definimos la métrica de Minkowski usando la convención

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -) \quad (\text{A.1})$$

- Definimos los operadores de Laplace y de D’Alambert:

$$\nabla^2 \equiv \sum_i \partial_i^2 \quad (\text{A.2})$$

$$\square \equiv \partial_0^2 - \nabla^2 = \partial_\mu \partial^\mu \quad (\text{A.3})$$

- Forma general de las corrientes de Noether para un sistema con campos  $\phi_i$ , lagrangiano  $\mathcal{L}$  y grupo de simetría de la acción con parámetros  $\epsilon^I$ :

$$J^\mu = \Pi^{i\mu} \delta \phi_i - T^\mu{}_\nu \delta x^\nu, \quad (\text{A.4})$$

$$J^\mu{}_I = \Pi^{i\mu} \frac{\partial \phi_i}{\partial \epsilon^I} - T^\mu{}_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial \epsilon^I}. \quad (\text{A.5})$$

Donde

$$\delta x^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \epsilon^I} \delta \epsilon^I, \quad (\text{A.6})$$

$$\delta \phi_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial \epsilon^I} \delta \epsilon^I, \quad (\text{A.7})$$

$$\Pi^{i\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i}, \quad (\text{A.8})$$

$$T^\mu{}_\nu = \Pi^{i\mu} \partial_\nu \phi_i - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}. \quad (\text{A.9})$$

# Bibliografía

- [1] Franz Mandl and Graham Shaw. *Quantum field theory*. John Wiley & Sons, 2010.
- [2] Michael Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [3] RAE ASALE. jurungar — diccionario de la lengua española, 2021.