



Proyecto de pasantía - Propuesta

Análisis de estabilidad de interfases en desplazamiento bifásico

Orozco, Diego^{1*}

Medina, Ernesto²

¹Autor, Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar

²Tutor, Universidad San Francisco de Quito

29 de agosto de 2022

Resumen

Recientemente se han reportado configuraciones geométricas de celdas Hele-Shaw que estabilizan el desplazamiento de un fluido de viscosidad μ_2 por otro de viscosidad μ_1 donde $\mu_2 > \mu_1$, un problema de sumo interés para recuperación mejorada de hidrocarburos. En este proyecto se derivará el criterio de estabilidad de interfase para el caso de una celda de altura variable incluyendo efectos de número capilar Ca y de ángulo de contacto. Con el fin de evaluar el criterio derivado se realizarán simulaciones de celdas de Hele-Shaw en régimen de flujo lento usando CFD-COMSOL.

Palabras clave: celdas Hele Shaw, estabilidad de interfase, número capilar, CFD-COMSOL.

Agradecimiento: Expresamos nuestro agradecimiento a LA-CoNGA physics, por la gestión del programa de pasantías del cual el presente proyecto forma parte, y a la Universidad Industrial de Santander (Colombia), por comprometerse como institución receptora y facilitarle el uso de sus instalaciones al autor del trabajo.

*Contacto: diego.ignacio.orozco@gmail.com

Índice

1. Introducción	2
2. Estado del arte	5
3. Objetivos	7
4. Metodología	8

1. Introducción

Una práctica común en física y en otras áreas de la ciencia consiste en aproximar aspectos de un determinado fenómeno de interés a un comportamiento lineal. Sin embargo, esto no cambia el hecho de que los sistemas naturales son, en general, no lineales y para profundizar en su comprensión deben ser estudiados como tales. De hecho, la no linealidad ofrece múltiples rutas de desarrollos científico, por cuanto estimulan el empleo de herramientas computacionales y la construcción de montajes experimentales, y tecnológicos, puesto que pueden ser aplicados al mundo real para obtener un beneficio económico.

En ese sentido, destacan algunos sistemas hidrodinámicos no lineales que pueden encontrarse en el contexto de extracción de hidrocarburos. Una vez que la presión natural no es suficiente para recuperar la materia prima de un yacimiento, deben emplearse técnicas para aprovechar la totalidad de la reserva. Una de estas técnicas consiste en inyectar otro fluido para empujar el que se desea extraer [1]. Si ambos fluidos son inmiscibles es claro que debe formarse una interfase entre ellos cuya dinámica, como cabe suponer, está relacionada con la eficiencia del proceso de producción. Cuando el fluido inyectado tiene una mayor viscosidad que la del empujado la interfase es estable ya que el segundo se opone en menor medida que el primero a ser desplazado. Caso contrario ocurre cuando el fluido inyectado es el que tiene menor viscosidad puesto que, al oponerse en menor medida al desplazamiento, es posible que penetre en la región del segundo fluido, lo cual se entiende como un comportamiento de inestabilidad. Sin embargo, el uso de agua para extraer la materia prima es económicamente eficiente, por lo que el caso en el que las inestabilidades son posibles es de gran interés, por cuanto el agua tiene una viscosidad menor que las de los fluidos que se encuentran en los yacimientos [1, 2]. De esta manera, los resultados de estudios centrados en el análisis de la estabilidad de la interfase, cuando el fluido introducido tiene menor viscosidad que el desplazado, son de gran relevancia en la industria de recuperación de hidrocarburos y en la producción de fuentes de energía.

Entre los modelos empleados para estudiar la formación de patrones y estructuras en sistemas hidrodinámicos destaca el problema de Saffman-Taylor [3]. En este se consideran dos fluidos, separados por una interfase, ubicados en una celda Hele-Shaw [4], la cual se caracteriza por una geometría sencilla donde se tienen dos placas paralelas separadas por una distancia lo suficientemente *pequeña* como para poder aproximar el problema a uno bidimensional. Así, ya que los fluidos se encontrarían en la estrecha región de separación, todas las variables relevantes del problema pueden

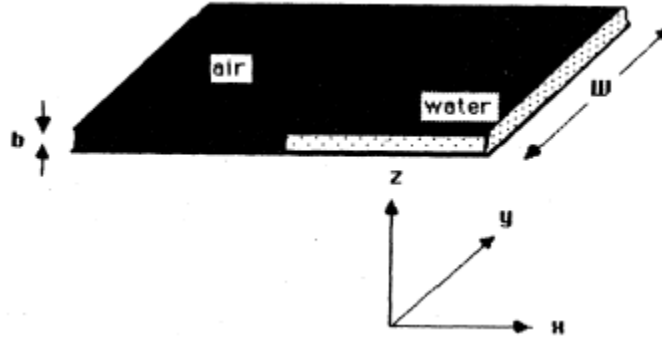


Figura 1: Esquema de celda Hele-Shaw con dos fluidos inmiscibles. Extraída del artículo de Bensimon, *et al* [2].

ser expresadas como funciones de las coordenadas x e y si se entiende que el plano xy es uno paralelo a las placas [2] (ver Figura 1).

El tratamiento matemático tradicional de la dinámica de la interfase entre dos fluidos en una celda Hele-Shaw se encuentra desarrollado con detalle en la literatura [2, 3, 5] y considera la inestabilidad conocida como *adedamiento viscoso*, que se refiere a las estructuras con forma de dedos que se forman en la interfase entre los fluidos cuando el fluido inyectado tiene menos viscosidad que el desplazado (ver Figura 2). A grandes rasgos, este parte de la conocida ecuación de Navier-Stokes desde la cual se puede derivar la ecuación correspondiente a la aproximación de Darcy

$$\vec{v}_i(x, y) = -\frac{b^2}{12\mu_i} (\nabla P_i(x, y) - \rho_i \vec{g}), \quad (1)$$

donde el subíndice $i = 1, 2$ denota el fluido, \vec{v} es la *velocidad de Darcy*, que está asociada al promedio del campo de velocidad en la interfase, b es la distancia entre las placas, P la presión, \vec{g} la componente de la aceleración de gravedad paralela a las placas, μ es la viscosidad y ρ la densidad. Adicionalmente, se considera que:

- Si los fluidos son incompresibles, la divergencia de la velocidad es nula. Luego, por la Ecuación (1), se tiene

$$\nabla^2 P = 0. \quad (2)$$

- En la interfase, las componentes de las velocidad de Darcy en uno de los fluidos son iguales (continuidad) a las correspondientes del otro fluido. Matemáticamente

$$v_1^j = v_2^j, \quad (3)$$

donde el superíndice $l = 1, 2$ se utiliza para denotar las componentes x e y , respectivamente, de la velocidad.

- El salto ΔP de la presión en la interfase puede escribirse en términos de la tensión superficial τ y el radio de curvatura κ en el plano xy como

$$\Delta P = \tau \kappa. \quad (4)$$

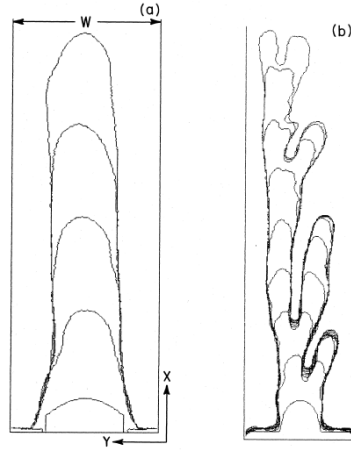


Figura 2: Adedamiento viscoso. Casos inestables en los cuales el adedamiento se bifurca más conforme la tensión superficial es menor. La imagen de la izquierda (a) corresponde a un caso de menor tensión superficial que el de la imagen de la derecha (b). Extraída del artículo de Bensimon, *et al* [2].

Para estudiar la estabilidad de la interfase entre los dos fluidos lo que se hace, comúnmente [2, 5, 6], es buscar un parámetro para el cual haya un valor crítico que pueda usarse como criterio de estabilidad. No es de extrañar, pues, que estos parámetros relacionen magnitudes del sistema relevantes en la estabilidad del mismo. Por ejemplo, un trabajo [6] del siglo pasado determinó un valor crítico de un parámetro adimensional que dependía del valor de la longitud de onda de la perturbación (i.e. inestabilidad) en la interfase, mientras que otro [2] obtuvo un parámetro d_0 , también adimensional, que depende de la geometría del problema y del número capilar. En particular, la forma en la que d_0 depende de las variables mencionadas es consistente con las conclusiones provenientes de un análisis dimensional [1] que emplea el conocido teorema II de Buckingham. A saber, el parámetro en cuestión se escribe como

$$d_0 = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{b}{W} \right) \left(\frac{\tau}{v\mu} \right) \quad (5)$$

donde W es el ancho de la celda mientras que los factores b/W y $\tau/v\mu$ corresponden a la *relación de aspecto* y al *número capilar* respectivamente.

Vale la pena mencionar que si se supone una perturbación en la interfase entre los dos fluidos de la forma

$$x(y) = vt + A(t) \cos(qy), \quad (6)$$

donde t es el tiempo, A es la amplitud y $q = 2\pi n/W$ el número de onda (n denota la cantidad de ciclos que contiene el ancho de la celda), entonces el criterio de estabilidad depende de la longitud de

onda λ de la perturbación y viene dado por [1, 2]

$$\begin{cases} d_0 > \frac{1}{n^2} = \left(\frac{\lambda}{W}\right)^2, & \text{estable} \\ d_0 < \frac{1}{n^2} = \left(\frac{\lambda}{W}\right)^2, & \text{inestable} \end{cases} \quad (7)$$

Al tomar en cuenta todo lo mencionado en los párrafos anteriores puede entenderse que el trabajo de investigación, correspondiente a la presente propuesta, puede apoyarse en un amplio conjunto de antecedentes como marco teórico. Así mismo, se espera que las conclusiones que se alcancen tengan implicaciones desde un punto de vista económico. En lo sucesivo, se expone brevemente el estado del arte (Sección 2), donde se hace referencia a trabajos recientes sobre análisis de estabilidad y uso de simulaciones en el programa COMSOL, se detallan los objetivos del presente proyecto de pasantía (Sección 3, se describe la metodología (Sección 4) a seguir para el cumplimiento de los objetivos y, finalmente, se listan las referencias de los trabajos mencionados en el texto.

2. Estado del arte

Trabajos recientes [7, 8, 9, 10, 11] se han incorporado a la literatura pertinente con tratamientos matemáticos y experimentales más elaborados que los mencionados en la Sección 1. Tres de estos textos [7, 8, 10] consideran la dinámica dentro de una celda Hele-Shaw con la particularidad de que la distancia b entre las placas es variable (i.e. hay un gradiente de profundidad) y se concluye que, bajo esta condición de profundidad variable, es posible disminuir o, incluso, inhibir el adedamiento. Específicamente, se describe el caso en el que una de las placas es paralela al eje x que coincide con la dirección del desplazamiento (ver Figura 3, mientras que la otra está inclinada de manera tal que b pueda escribirse como una función de x tal que

$$b(x) = \alpha x + b_0, \quad (8)$$

donde α , con $|\alpha| \ll 1$, es la pendiente asociada a la inclinación de la placa y b_0 es una constante que representa la distancia mínima (máxima) entre las placas cuando α tiene un valor positivo (negativo). Adicionalmente, en uno de esos trabajos [8], se extiende el estudio al caso en el que el desplazamiento es radial (ver Figura 4). Para ambos escenarios, se encuentran criterios de estabilidad que dependen de la geometría del problema, el ángulo de contacto en la interfase, la razón de viscosidad $M \equiv \mu_2/\mu_1$ y el número capilar $Ca = 12\mu_1 v/\tau$.

Otro tratamiento se enfoca la supresión del adedamiento en medios porosos [9], incluye la gravedad en su análisis teórico, define un número capilar generalizado Ca^* y encuentra un criterio de estabilidad que depende de Ca^* . Resulta interesante dicho trabajo no solo presenta una matemática más compleja que la empleada en textos previos, sino que además, con análisis experimentales y simulaciones, consigue identificar dos mecanismos, dependientes del tamaño de los poros del medio, responsables de la supresión del adedamiento viscoso.

Por lo que se ha mencionado, no es de extrañar que el empleo de simulaciones por computadora sea esencial en el desarrollo de modelos en dinámica de fluidos. En este respecto, un programa que permite simular estos sistemas en una celda Hele-Shaw es COMSOL Multiphysics. En particular,

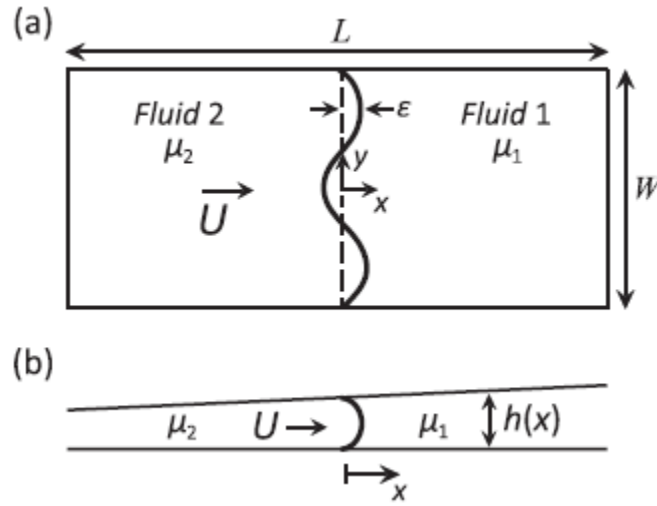


Figura 3: Esquema de celda Hele-Shaw con profundidad que depende linealmente de la coordenada de la dirección del desplazamiento. Extraída del artículo de Al-Housseiny y Stone [8].

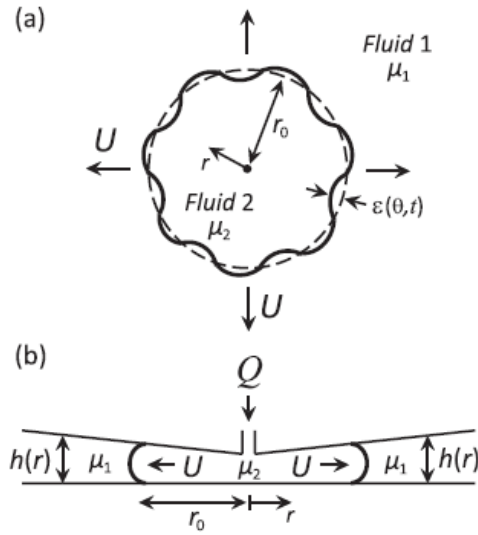


Figura 4: Esquema de celda Hele-Shaw con profundidad que depende linealmente de la distancia radial. Extraída del artículo de Al-Housseiny y Stone [8].

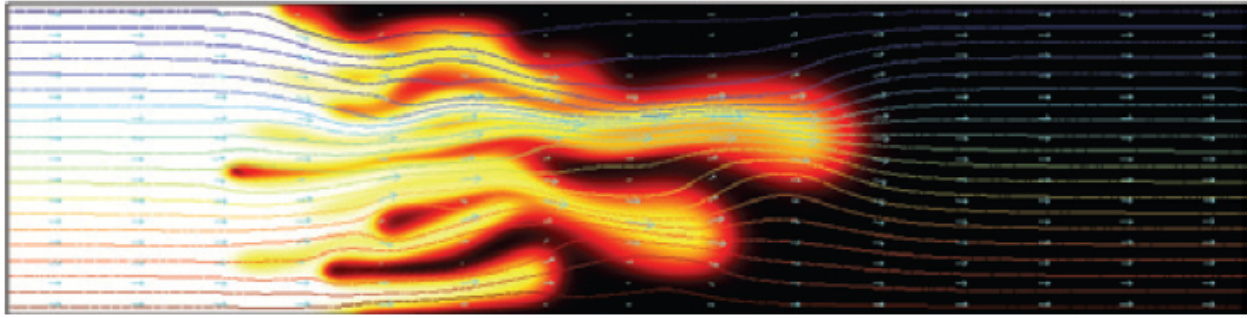


Figura 5: Adedamiento viscoso simulado empleando COMSOL Multiphysics. Extraída del trabajo de Holzbecher [12].

es posible reproducir el fenómeno de adedamiento viscoso con costes de cómputo (i.e. tiempos de ejecución del programa) inferiores a 30 minutos [12] (ver Figura 5). Por lo tanto, se espera que con la librería de dinámica de fluidos computacional (CDF por sus siglas en inglés) de COMSOL Multiphysics, en el trabajo correspondiente a la presente propuesta, pueda simularse un sistema de desplazamiento bifásico dentro de una celda Hele-Shaw de profundidad variable y donde puedan considerarse los efectos del ángulo de contacto en la interfase y del número capilar en la estabilidad del sistema. De esta manera, se pretende que las simulaciones puedan contribuir en el desarrollo de un análisis teórico que profundice en aspectos tratados en la literatura presentada.

3. Objetivos

El objetivo principal del trabajo propuesto consiste en obtener un criterio de estabilidad para un sistema de desplazamiento bifásico en una celda Hele-Shaw de profundidad variable, que considere los efectos del número capilar y del ángulo de contacto y pueda ser verificado con simulaciones empleando CFD-COMSOL.

Para el cumplimiento del objetivo principal, se plantean los siguientes objetivos específicos:

1. Realizar un análisis teórico del problema de desplazamiento bifásico en una celda Hele-Shaw de profundidad constante que considere los efectos del número capilar y ángulo de contacto.
2. Verificar las conclusiones del análisis teórico para profundidad constante en simulaciones hechas con CFD-COMSOL.
3. Construir simulaciones en CFD-COMSOL que puedan reproducir los resultados obtenidos en la literatura reciente [7, 8, 9, 10]
4. Determinar opciones viables teórica y computacionalmente para el gradiente de profundidad que extiendan o no hayan sido consideradas en la literatura reciente y que sean razonables desde el punto de vista físico.
5. Analizar la ralentización crítica en la vecindad de transiciones de formación de varios dedos.

4. Metodología

A partir de los objetivos planteados, es natural dividir el trabajo en cuatro etapas:

1. **Profundización teórica** de los modelos presentes en la literatura y problemas de interacción con fronteras.
2. **Reproducibilidad computacional** usando CFD-COMSOL de los modelos existentes.
3. **Desarrollo teórico** de un modelo con aspectos distintivos de los ya existentes.
4. **Verificación computacional** del modelo propuesto usando CFD-COMSOL.

Vale la pena mencionar que las etapas 3 y 4 se complementan entre ellas por lo que avanzarán de manera conjunta (retroalimentación).

Al tomar en cuenta que se disponen de 12 semanas para realizar este proyecto de pasantía y las etapas mencionadas anteriormente, se cree conveniente organizar el cronograma de actividades de la siguiente manera:

Semana 1: *Profundización teórica I*: Asimilación detallada de los tratamientos tradicionales y recientes del problema de Saffman-Taylor.

Semana 2: *Reproducibilidad computacional I*: Familiarización con el uso de CFD-COMSOL, simulaciones típicas del problema Saffman-Taylor.

Semana 3: *Profundización teórica II*: Análisis de la influencia del número capilar y del ángulo de contacto en los modelos teóricos.

Semana 4: *Reproducibilidad computacional II*: Manipulación de los parámetros de número capilar y ángulo de contacto y examen de los cambios que se producen en las simulaciones.

Semana 5: *Desarrollo teórico I*: Consideración la ralentización crítica en la vecindad de transiciones de formación de varios dedos.

Semana 6: *Verificación computacional I*: Simulaciones de ralentización crítica y formación de varios dedos. Retroalimentación para mejorar el modelo teórico.

Semana 7: *Desarrollo teórico II*: Estudio de la viabilidad de otros gradientes de profundidad.

Semana 8: *Verificación computacional II*: Implementación de los nuevos gradientes de profundidad en las simulaciones. Retroalimentación para mejorar el modelo teórico.

Semana 9: *Desarrollo teórico III*: versión final del modelo teórico.

Semana 10: *Verificación computacional III*: últimas simulaciones y comparación con las expectativas teóricas.

Semana 11: Redacción del informe de pasantía.

Semana 12: Corrección y entrega final del informe de pasantía.

Referencias

- [1] Dalena León. *Interphase analysis of viscous flow in porous media to enhance oil recovery*. Universidad Yachay Tech, Urcuquí, 2021.
- [2] David Bensimon, Leo Kadanoff, Shoudan Liang, Boris Shraiman, and Chao Tang. Viscous flow in two dimensions. *Reviews of Modern Physics*, 58:977–999, 10 1986.
- [3] P. G. Saffman and Geoffrey Ingram Sir Taylor. The penetration of a fluid into a porous medium or hele-shaw cell containing a more viscous liquid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 245:312 – 329, 1958.
- [4] Henry Selby Hele-Shaw. The flow of water. *Nature*, 58:34–36.
- [5] G M Homsy. Viscous fingering in porous media. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 19(1):271–311, 1987.
- [6] R.L. Chuoke, P. van Meurs, and C. van der Poel. The Instability of Slow, Immiscible, Viscous Liquid-Liquid Displacements in Permeable Media. *Transactions of the AIME*, 216(01):188–194, 12 1959.
- [7] Talal Al-Housseiny, Peichun Tsai, and Howard Stone. Control of interfacial instabilities using flow geometry. *Nature Physics*, 8:747–750, 10 2012.
- [8] Talal Al-Housseiny and Howard Stone. Controlling viscous fingering in tapered hele-shaw cells. *Physics of Fluids*, 25:2102–, 09 2013.
- [9] Harris Sajjad Rabbani, Dani Or, Ying Liu, Ching-Yao Lai, Nancy B. Lu, Sujit S. Datta, Howard A. Stone, and Nima Shokri. Suppressing viscous fingering in structured porous media. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(19):4833–4838, 2018.
- [10] Ali Eslami, Raunak Basak, and Seyed Mohammad Taghavi. Multiphase viscoplastic flows in a nonuniform hele-shaw cell: A fluidic device to control interfacial patterns. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, XXXX, 02 2020.
- [11] Benzhong Zhao, Christopher MacMinn, Bauyrzhan Primkulov, Yu Chen, Albert Valocchi, Jian-lin Zhao, Qinjun Kang, Kelsey Bruning, James McClure, Cass Miller, Abbas Fakhari, Diogo Bolster, Thomas Hiller, Martin Brinkmann, Luis Cueto-Felgueroso, Daniel Cogswell, Rahul Verma, Maša Prodanović, Julien Maes, and Ruben Juanes. Comprehensive comparison of pore-scale models for multiphase flow in porous media. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 116:13799–13806, 06 2019.
- [12] Ekkehard Holzbecher. Modeling of viscous fingering. 01 2009.