



Módulo de instrumentación - Proyecto de módulo Equilibrio Caótico - Péndulo invertido

Victor Guzmán (UCV/UC)

1 de junio de 2022

Índice

1. Introducción	2
2. Ecuaciones de Euler-Lagrange y Solución Auto-Consistente	2
2.1. Lagrangiana del sistema	2
2.2. Ecuaciones de movimiento y aproximaciones	3
2.3. Solución analítica: Reinterpretación como ecuación auto-consistente	4
3. Simulación	5
3.1. Código en Python	5
3.2. Casos simulados: Desplazamiento angular en el tiempo	7
3.3. Casos simulados: Espacio de fases	10
4. Análisis y discusión	11
4.1. Perturbación en el espacio de fases	11
4.2. Intervalos de tiempo grandes y evolución del sistema	12
Referencias	14

Resumen

El péndulo invertido fue estudiado teóricamente y por medio de una simulación en python para pequeñas oscilaciones, del estudio teórico se obtuvieron las ecuaciones de movimiento para perturbaciones pequeñas y ángulos pequeños, además la ecuación de movimiento fue reescrita en una forma integral como una ecuación auto-consistente, en la cual se puede ver el

comportamiento hiperbólico del ángulo y su dependencia con las condiciones iniciales, por otro lado el sistema fue simulado en Python observando una región con un comportamiento inestable, con un espacio de fases no acotado, para frecuencias bajas con $\omega \leq 440$ rad/s dadas unas condiciones iniciales y un comportamiento estable, con un espacio de fases acotado, para altas frecuencias con $\omega \geq 445$ rad/s. La región intermedia con $\omega \in (440, 445)$ rad/s es interpretada como una región de transición entre ambos comportamientos.

1. Introducción

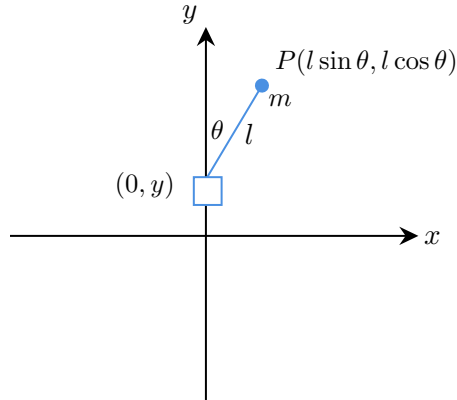
El problema del péndulo invertido tratado acá, consiste de un péndulo colocado desde su punto más alto y el cual tiene en su punto de apoyo un motor que le permite oscilar verticalmente. Lo que se puede observar de este sistema es que el mismo alcanza una posición de equilibrio estable alrededor del punto más alto. Se puede observar visualmente el comportamiento de este sistema en simulaciones como la de [1]. En ella se pueden variar los parámetros para observar el comportamiento del sistema.

Existen múltiples versiones de este problema, como la del péndulo invertido en un carro, [2] el cuál es usado para ejemplificar el control adaptativo, otros buscan aproximar la ecuación a una ecuación de Mathieu para analizar esta y en [3] se estudia la estabilización para el péndulo invertido a altas frecuencias en el cual se estudia a su vez la estabilización de este sistema en el caso de gravedad cero y se compara con la estabilización en presencia de ella. La versión que se analiza acá es la del péndulo de Kapitza[4, 5], para ello se realizó la transformada de Laplace del sistema y se aplicó la transformada inversa para conseguir una expresión para $\theta(t)$ y adicionalmente se realizó un código en python para simular el experimento dadas distintas configuraciones del mismo.

2. Ecuaciones de Euler-Lagrange y Solución Auto-Consistente

2.1. Lagrangiana del sistema

Primero identifiquemos la posición de la masa m :



es decir que la posición de la partícula sería:

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \quad \text{con} \quad \overrightarrow{OA} = A \cos(\omega t) \hat{j} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{AP} = l(\sin \theta, \cos \theta)$$

entonces:

$$\mathbf{r} = (l \sin \theta, A \cos \omega t + l \cos \theta) \quad (1)$$

considerando que la lagrangiana es $\mathcal{L} = T - U$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T - U &= \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}|^2 - m g \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{j}} \\ &= \frac{1}{2} m \left| (l \dot{\theta} \cos \theta, -A \omega \sin \omega t - l \dot{\theta} \sin \theta) \right|^2 - m g (l \sin \theta, A \cos \omega t + l \cos \theta) \cdot \hat{\mathbf{j}} \\ &= \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 + 2 A \omega l \dot{\theta} \sin \omega t \sin \theta + A^2 \omega^2 \sin^2 \omega t) - m g (A \cos \omega t + l \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m A \omega l \dot{\theta} \sin \omega t \sin \theta + \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2 \omega t - m g (A \cos \omega t + l \cos \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

Introduzcamos la aproximación $A \ll l$, es decir, que la amplitud de las oscilaciones es despreciable respecto a la longitud de la barra de longitud l . Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= l^2 \left(\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 + m \omega \frac{A}{l} \dot{\theta} \sin \omega t \sin \theta + \frac{1}{2} m A^2 \frac{\omega^2}{l^2} \sin^2 \omega t \right) - m g (A \cos \omega t + l \cos \theta) \\ &= l^2 \lim_{A/l \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 + m \omega \frac{A}{l} \dot{\theta} \sin \omega t \sin \theta + \frac{1}{2} m A^2 \frac{\omega^2}{l^2} \sin^2 \omega t \right) - m g (A \cos \omega t + l \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m A l \omega \dot{\theta} \sin(\omega t) \sin \theta - m g [A \cos(\omega t) + l \cos \theta] \end{aligned} \quad (3)$$

2.2. Ecuaciones de movimiento y aproximaciones

De acá obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= m \omega A l \dot{\theta} \sin(\omega t) \cos \theta + m g l \sin \theta - m l^2 \ddot{\theta} - m \omega^2 A l \cos(\omega t) \sin \theta - \dots \\ &\quad - \dots m \omega \dot{\theta} A l \sin(\omega t) \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Entonces:

$$m l^2 \left(\ddot{\theta} + \omega^2 \frac{A}{l} \cos(\omega t) \sin \theta - \frac{g}{l} \sin \theta \right) = 0 \quad (5)$$

esta expresión resulta interesante por varios motivos, analicemos algunos términos:

$$\frac{A}{l} := \eta \quad (\text{Parámetro adimensional, caracteriza la escala de longitudes}) \quad (6)$$

$$\frac{g}{l} := \omega_0^2 \quad (\text{Frecuencia natural de vibración}) \quad (7)$$

entonces la ecuación de movimiento sería:

$$\ddot{\theta} - \omega_0^2 \sin \theta = -\eta \omega^2 \sin \theta \cos \omega t \quad (8)$$

Para ángulos pequeños se tendría:

$$\ddot{\theta} - \omega_0^2 \theta = -\eta \omega^2 \theta \cos \omega t \quad (9)$$

Esta ecuación fue utilizada para la simulación. Sin embargo abajo se realizó un procedimiento por medio de la transformada de Laplace para encontrar una solución a la ecuación de arriba.

2.3. Solución analítica: Reinterpretación como ecuación auto-consistente

Usando la transformada de Laplace en la ecuación:

$$L\{\ddot{\theta}\} - \omega_0^2\{\theta\} = -\eta\omega^2 L\{\theta \cos(\omega t)\}$$

donde:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-\alpha t} dt,$$

por lo tanto:

$$L\{\ddot{\theta}\} = \int_0^\infty \ddot{\theta} e^{-\alpha t} dt = -\dot{\theta}_0 - \alpha\theta_0 + \alpha^2\Theta; \quad \Theta := L\{\theta\}$$

es decir que:

$$-\dot{\theta}_0 - \alpha\theta_0 + \alpha^2\Theta - \omega_0^2\Theta = -\eta\omega^2 L\{\theta \cos(\omega t)\}$$

despejando de acá:

$$\Theta = -\eta\omega^2 \frac{L\{\theta \cos(\omega t)\}}{\alpha^2 - \omega_0^2} + \frac{\dot{\theta}_0}{\alpha^2 - \omega_0^2} + \theta_0 \frac{\alpha}{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (10)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a esta ecuación, se mostrará el procedimiento del término más complicado:

$$L^{-1} \left\{ \frac{L\{\theta \cos(\omega t)\}}{\alpha^2 - \omega_0^2} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{\omega_0} L\{\theta \cos(\omega t)\} \cdot L\{\sinh(\omega_0 t)\} \right\}$$

aplicando el teorema de convolución:

$$L^{-1} \left\{ \frac{L\{\theta \cos(\omega t)\}}{\alpha^2 - \omega_0^2} \right\} = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \dot{\theta}(\tau) \cos(\omega\tau) \sinh[\omega_0(t - \tau)] d\tau \quad (11)$$

por lo tanto la solución encontrada en forma de una ecuación auto-consistente es:

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \sinh(\omega_0 t) + \theta_0 \cosh(\omega_0 t) - \frac{\eta\omega^2}{\omega_0} \int_0^t \theta(\tau) \cos(\omega\tau) \sinh[\omega_0(t - \tau)] d\tau \quad (12)$$

Hay varias cosas importantes a señalar en relación a la ecuación 12, nótese como la dependencia de las condiciones iniciales $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ escala en el tiempo de forma hiperbólica. Por otro lado nótese como en la parte integral de la ecuación (convolución), el valor que toma θ en el instante t depende del valor que ha tomado en momentos previos.

Adicionalmente podemos hacer un análisis del comportamiento de la velocidad angular $\dot{\theta}(t)$ derivando la expresión 12. Para conseguir $\dot{\theta}$ debemos conseguir la derivada de la integral que aparece allí. Esto lo podemos hacer considerando:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^t f(t, \tau) d\tau \right] = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + f(t, t) \cdot \frac{dt}{dt} - f(0, t) \cdot \frac{d0}{dt} \quad (13)$$

por lo tanto la velocidad sería:

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \cosh(\omega_0 t) + \theta_0 \omega_0 \sinh(\omega_0 t) - \eta \omega^2 \int_0^t \theta(\tau) \cos(\omega \tau) \cosh[\omega_0(t - \tau)] d\tau \quad (14)$$

es decir que la velocidad angular también presentará un comportamiento sensible a las condiciones iniciales en el sentido de escalar hiperbólicamente y además dependerá del valor que ha tomado θ desde el momento inicial hasta ese instante.

3. Simulación

3.1. Código en Python

El código fue elaborado en el jupyter notebook y es el siguiente:

```
# Importando las librerías necesarias para la ejecución del código

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
from scipy.integrate import odeint
import math

# Definición de las constantes

theta_0 = 0.001          # Ángulo inicial
theta_pto_0 = 0          # Velocidad angular inicial
g = 9.8                  # Gravedad
l = 0.05                 # Longitud en metros
A = 0.01                 # Amplitud de las oscilaciones
t_0 = 0                  # Instante inicial
t_f = 10                 # Instante final
N = 10000                #
omega = 400
Tolera = 1.5

# Constantes derivadas
eta = A/l
delta_t = (t_f-t_0)/N
omega_0 = np.sqrt(g/l)

# Solución de la ecuación diferencial
def dSol_dx(Sol, t):
    # Aquí Sol es un vector tal que theta=Sol[0] y theta_punto=z=Sol[1]. La función regresa [y',
```

```

    return [Sol[1], (omega_0**2)*Sol[0] - eta*(omega**2)*Sol[0]*np.cos(omega*t)]

# Vector inicial con el ángulo inicial y la velocidad angular inicial
Sol_0 = [theta_0, theta_pto_0]

# Número de instantes a considerar y solución de la ecuación diferencial
T = np.linspace(t_0, t_f, N)
Sols = odeint(dSol_dx, Sol_0, T)

# Reescalamiento de las soluciones y asignación a la variable a
rescaled_Sols = []
for i in Sols[:,0]:
    if int(i / 2*math.pi) == 0:
        rescaled_Sols.append(i)
    else:
        rescaled_Sols.append(i-2*math.pi*int(i/(2*math.pi)))

a = rescaled_Sols

# Gráfica de theta en el tiempo, dependiendo del valor que tome theta se cambiará
# la forma en que se grafica
if max(a) < Tolera:
    g = sns.scatterplot(x=T, y=a, s=2)
    g.set_title(r"$\theta$ vs $t$")
    g.set_xlabel("Tiempo $t$ (s)")
    g.set_ylabel(r"Desplazamiento angular $\theta$ (rad)")
else:
    def format_func(value, tick_number):
        # find number of multiples of pi/2
        N = int(np.round(2 * value / np.pi))
        if N == 0:
            return "0"
        elif N == 1:
            return r"$\pi/2$"
        elif N == 2:
            return r"$\pi$"
        elif N % 2 > 0:
            return r"${0}\pi/2".format(N)
        else:
            return r"${0}\pi".format(N // 2)
    g = sns.scatterplot(x=T, y=a, s=5)

```

```
#g = sns.scatterplot(x=l*math.sin(a),y=l*math.cos(a), s=0.2)
g.yaxis.set_major_formatter(plt.FuncFormatter(format_func))
g.set_title(r"$\theta$ vs $t$")
g.set_xlabel("Tiempo $t$ (s)")
g.set_ylabel(r"Desplazamiento angular $\theta$ (rad)")

plt.show()

# Graficación del espacio de fases
gh = sns.scatterplot(x=a,y=np.gradient(a,delta_t), s=5)
gh.tick_params(axis='x', rotation=45)
gh.set_title(r"$\dot{\theta}$ vs $\theta$")
gh.set_xlabel(r"Desplazamiento angular $\theta$ (rad)")
gh.set_ylabel(r"Velocidad angular $\dot{\theta}$ (rad/s)")
sns.set(rc={'figure.figsize':(11.7,8.27)})

plt.show()
```

Las imágenes obtenidas por el código son de la siguiente manera:

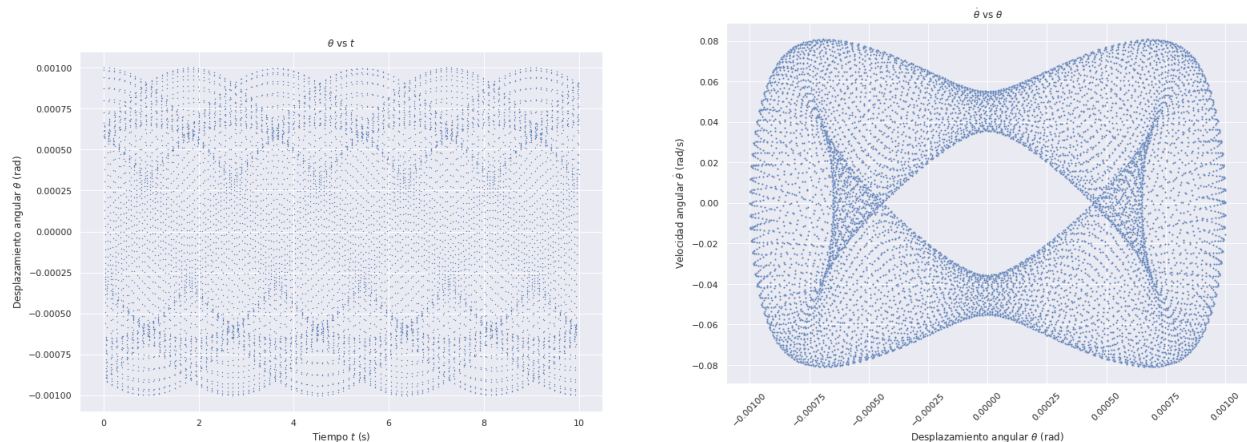


Figura 1: Imágenes que arroja el código de arriba si es ejecutado.

El código arroja dos figuras, la de la izquierda representa la evolución de θ en el tiempo y la otra imagen a la derecha es la gráfica de θ vs $\dot{\theta}$.

3.2. Casos simulados: Desplazamiento angular en el tiempo

Se realizaron distintas simulaciones para estudiar el comportamiento del sistema. Las condiciones iniciales fueron $\theta_0 = 0,001$, $\dot{\theta}_0 = 0$, $l = 1$, $A = 0,01$ $\omega = 1$, para el caso de frecuencias pequeñas, se obtuvo:

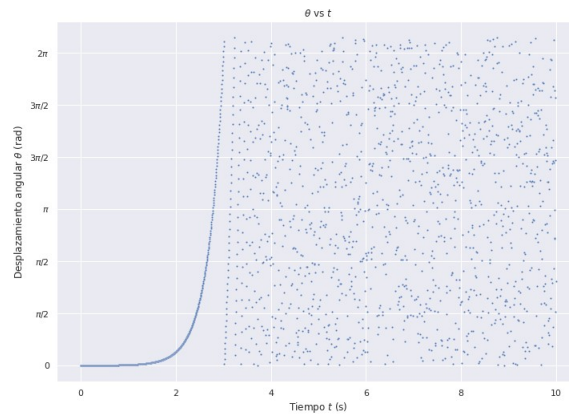


Figura 2: Evolución de θ para bajas frecuencias $\omega = 1$.

esta imagen fue tomada para tener una referencia. Otras simulaciones fueron realizadas a $\omega = 400, 415, 430, 440$ rad/s, obteniendo:

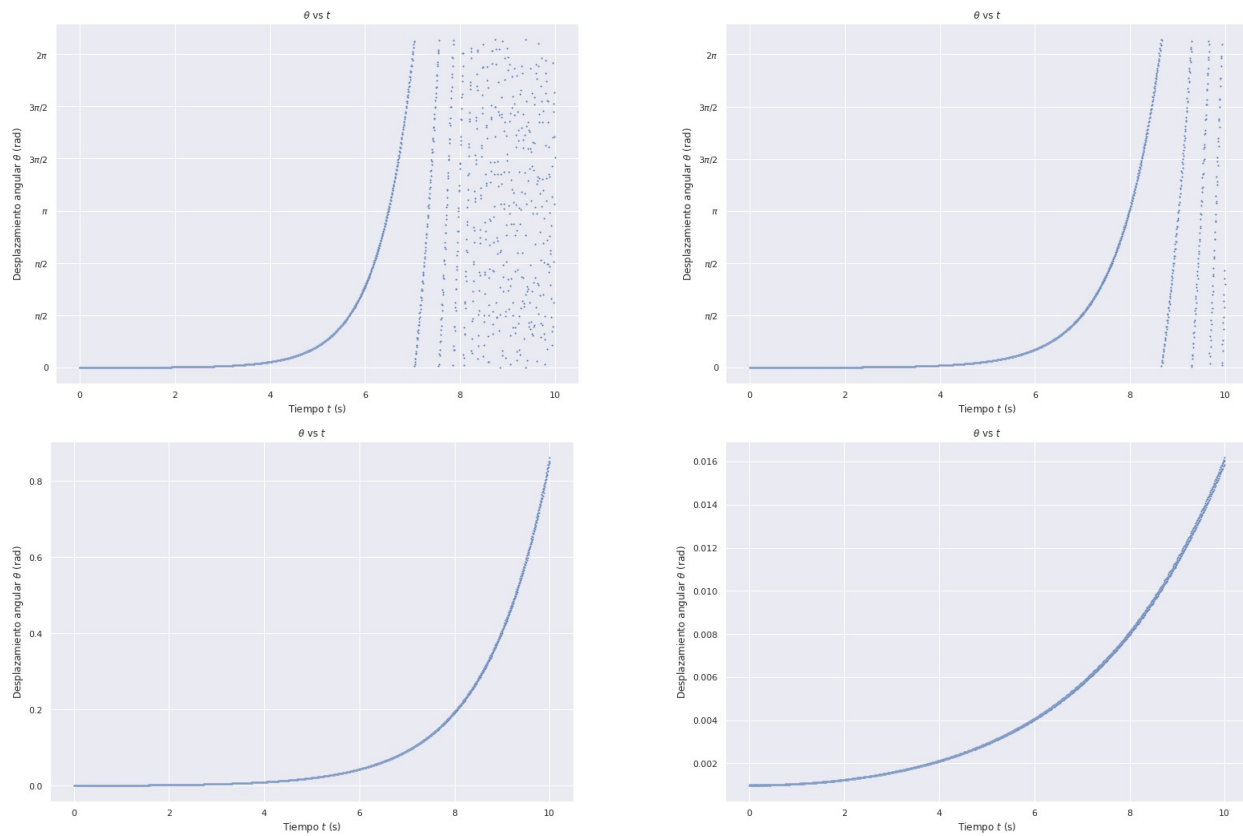


Figura 3: Evolución de θ para frecuencias *intermedias*, nótese el cambio de escala.

nótese el cambio de escala con el aumento de la frecuencia. Finalmente se realizaron las simulaciones con frecuencias de 445, 450, 500, 1000. Nótese como para estas frecuencias el comportamiento es oscilatorio, y adicionalmente que la amplitud de las oscilaciones alrededor de lo que sería este punto de equilibrio dependen de θ_0 , en este caso para $\dot{\theta}_0 = 0$ rad/s, la amplitud de las oscilaciones es igual al valor del ángulo inicial. Con esto se confirma lo que se puede ver en las simulaciones que existen en las múltiples páginas web, que para altas frecuencias el sistema permanecerá oscilando alrededor del punto mas alto. 4

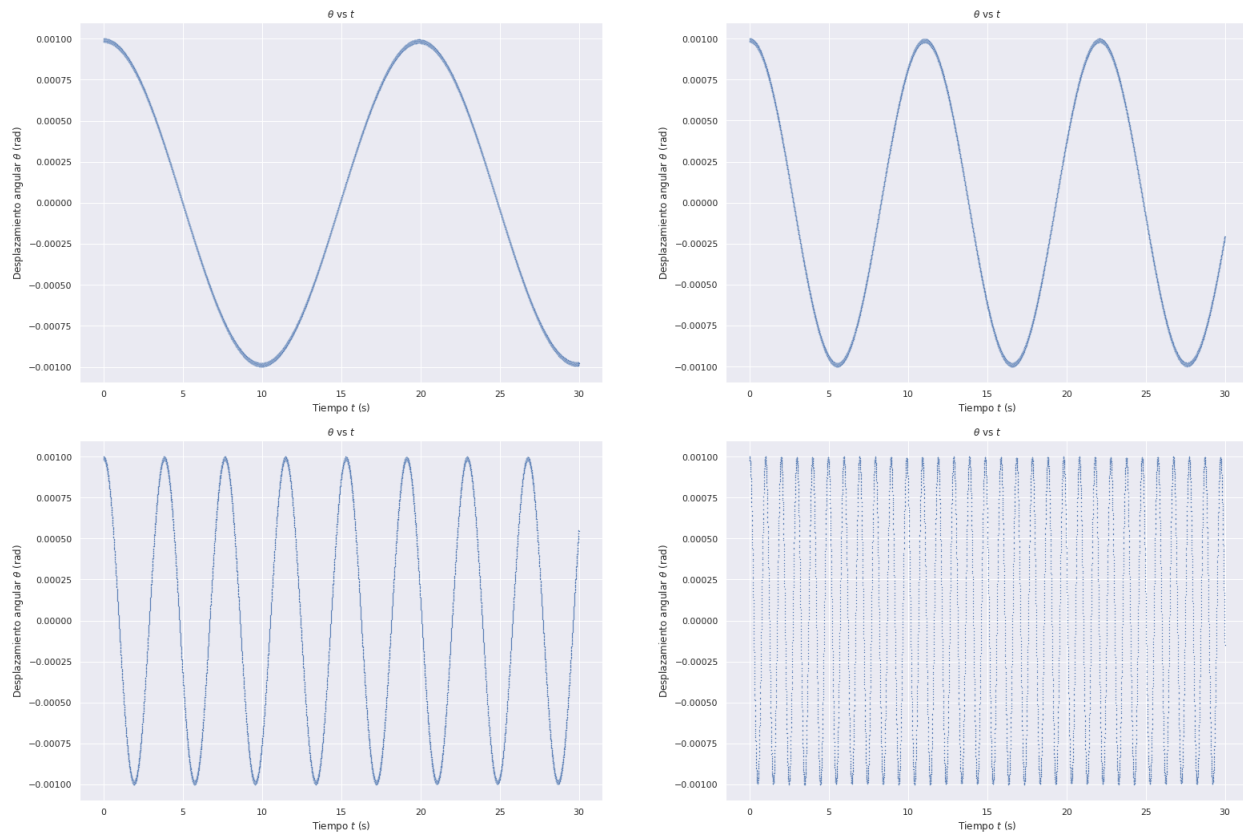


Figura 4: Evolución de θ para *altas* frecuencias, nótese el comportamiento oscilatorio.

3.3. Casos simulados: Espacio de fases

Acá se analiza el sistema dependiendo del comportamiento que tiene en el espacio de fases, el análisis se hará en las regiones descritas de baja y alta frecuencia. Analizando hasta un $t_f = 10$ s:

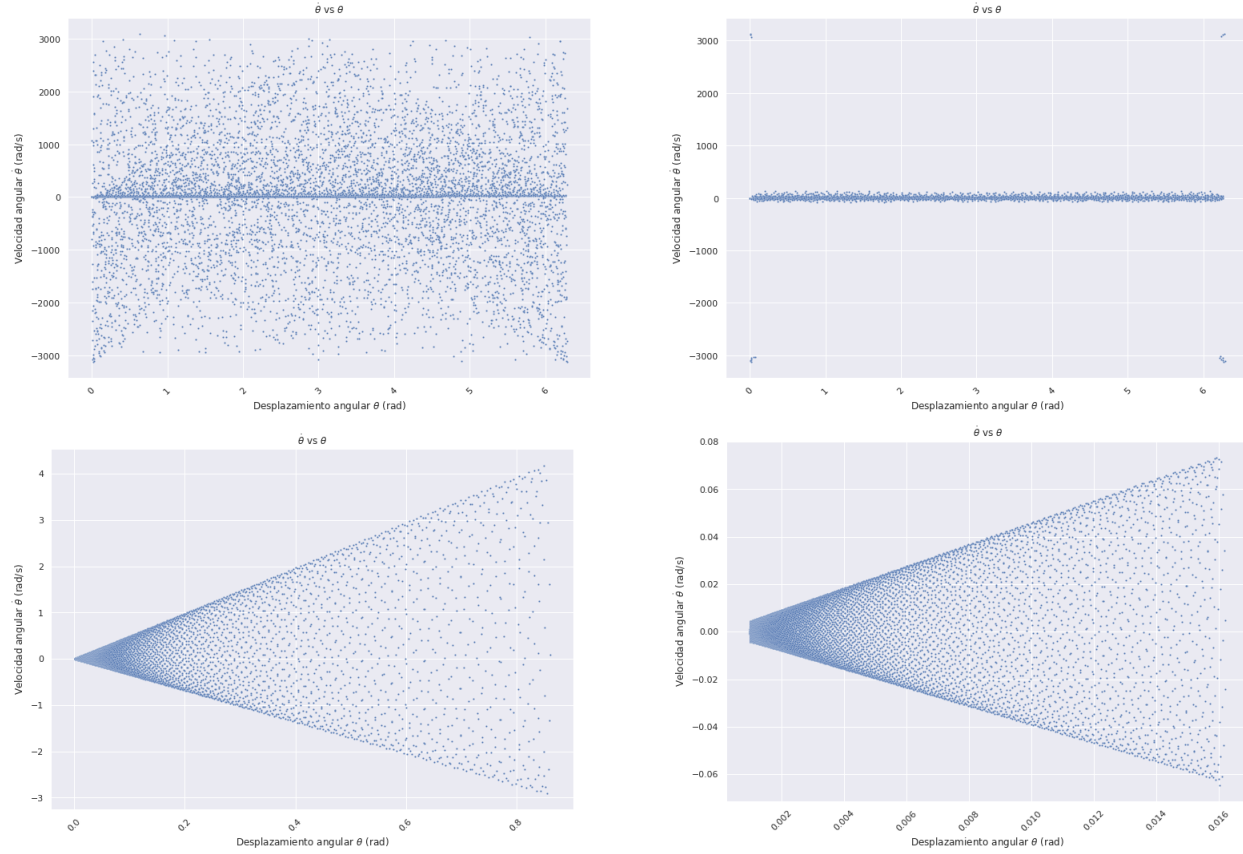


Figura 5: Espacio de fases del sistema para pequeñas frecuencias en un intervalo de $t = 10$ s.

por otro lado para altas frecuencias analizando hasta $t_f = 30\text{s}$ y más puntos⁶.

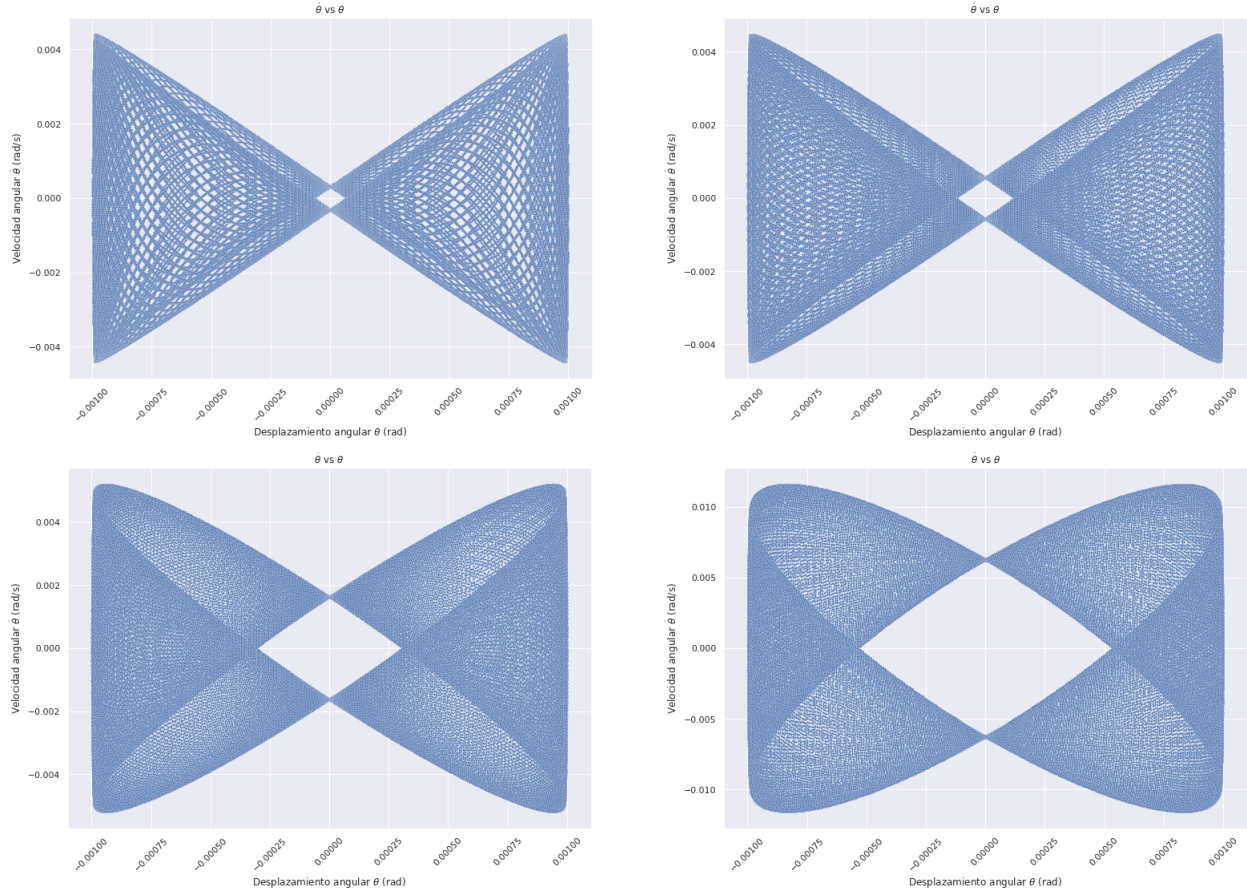


Figura 6: Espacio de fases del sistema para pequeñas frecuencias en un intervalo de $t = 30\text{s}$.

Nótese que para altas frecuencias el espacio de fases se encuentra encapsulado en una región finita definida por las condiciones iniciales del sistema.

4. Análisis y discusión

4.1. Perturbación en el espacio de fases

Partiendo de la ecuación 12, se realiza una pequeña perturbación del estado inicial en el espacio de fases, construido de forma tal que el estado del sistema es $\Gamma(\theta, \dot{\theta}/\omega_0)$. Si el sistema es colocado en una posición inicial $\Gamma_0 = \Gamma_0(\theta_0, \dot{\theta}_0/\omega_0)$ y luego es colocado en un estado inicial diferente pero

cercano a Γ_0 , llamado $\Gamma'(\theta_0 + \delta\theta, (\dot{\theta}_0 + \delta\dot{\theta})/\omega_0)$, el cual es cercano en el sentido en que:

$$\|\Gamma - \Gamma_0\| = \sqrt{(\theta_0 + \delta\theta - \theta_0)^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_0 + \delta\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{(\delta\theta)^2 + \left(\frac{\delta\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2} \approx 0 \quad (15)$$

Nótese que si el sistema inicia en el estado perturbado Γ' la ecuación en la forma integral tendría dos términos adicionales en comparación con el caso previamente estudiado:

$$\begin{aligned} \theta'(t) = & \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \sinh(\omega_0 t) + \theta_0 \cosh(\omega_0 t) - \frac{\eta\omega^2}{\omega_0} \int_0^t \theta'(\tau) \cos(\omega\tau) \sinh[\omega_0(t - \tau)] d\tau + \frac{\delta\dot{\theta}}{\omega_0} \sinh(\omega_0 t) + \dots \\ & \dots + \delta\theta \cosh(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (16)$$

nótese que aparecen dos términos adicionales y como dependen de las funciones hiperbólicas (no acotadas), sin importar cuán pequeña sea la diferencia de este estado con el estado Γ_0 , dado un t suficientemente grande en el sentido $\omega_0 t \gg 1$, la contribución del estado inicial modificará el comportamiento de la función.

Hay otra manera de interpretar la ecuación 12, pensando en las condiciones iniciales como una medida junto a un error $\theta_0 = \theta_{m,0} \pm \delta\theta$ y $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_{m,0} \pm \delta\dot{\theta}$. Visto de esa manera entonces:

$$\begin{aligned} \theta(t) = & \frac{\dot{\theta}_{m,0}}{\omega_0} \sinh(\omega_0 t) + \theta_{m,0} \cosh(\omega_0 t) - \frac{\eta\omega^2}{\omega_0} \int_0^t \theta(\tau) \cos(\omega\tau) \sinh[\omega_0(t - \tau)] d\tau + \frac{\delta\dot{\theta}}{\omega_0} \sinh(\omega_0 t) + \dots \\ & \dots + \delta\theta \cosh(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (17)$$

se puede interpretar esto como que dado un tiempo suficientemente grande los errores en establecer las condiciones iniciales pueden hacer que el sistema evolucione de una manera diferente en cada repetición del experimento.

4.2. Intervalos de tiempo grandes y evolución del sistema

En la ecuación 12 para $\omega_0 t \gg 1$, tal que $\sinh(\omega_0 t) = \cosh(\omega_0 t) = \frac{1}{2}e^{\omega_0 t}$ y $\sinh[\omega_0(t - \tau)] = \sinh(\omega_0 t) \cosh(\omega_0 \tau) - \sinh(\omega_0 \tau) \cosh(\omega_0 t) = e^{\omega_0(t - \tau)}$, la ecuación quedaría como:

$$\begin{aligned} \theta(t) = & \frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \right) e^{\omega_0 t} - \frac{\eta\omega^2}{\omega_0} \int_0^t \theta(\tau) \cos(\omega\tau) e^{\omega_0(t - \tau)} d\tau \\ = & e^{\omega_0 t} \left[\frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \right) - \frac{\eta\omega^2}{\omega_0} \int_0^t \theta(\tau) \cos(\omega\tau) e^{-\omega_0 \tau} d\tau \right] \end{aligned} \quad (18)$$

haciendo un procedimiento similar pero para $\dot{\theta}$ 14:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\theta}(t)}{\omega_0} &= \frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \right) e^{\omega_0 t} - \frac{\eta \omega^2}{\omega_0} \int_0^t \theta(\tau) \cos(\omega \tau) e^{\omega_0(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{\omega_0 t} \left[\frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \right) - \frac{\eta \omega^2}{\omega_0} \int_0^t \theta(\tau) \cos(\omega \tau) e^{-\omega_0 \tau} d\tau \right]\end{aligned}\quad (19)$$

nótese que:

$$\left\| \left(\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right) \right\| = e^{\omega_0 t} \sqrt{2} \left| \frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \right) - \frac{\eta \omega^2}{\omega_0} \int_0^t \theta(\tau) \cos(\omega \tau) e^{-\omega_0 \tau} d\tau \right| \quad (20)$$

de acuerdo a lo visto en la simulación y de [1], se espera que el espacio de fases esté acotado para altas frecuencias y que no esté acotado para bajas frecuencias. Esto puede entenderse como que para ω grande la distancia 20 es finita y para ω pequeño ha de diverger.

Esto puede entenderse por medio de la ecuación 20 de la siguiente manera, nótese que para ω pequeño la contribución del término integral es despreciable como se puede ver en las figuras 2, 3. El comportamiento es exponencial y se puede entender como:

$$\left\| \left(\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \right| e^{\omega_0 t}, \quad (t \text{ grande y } \omega \text{ pequeño}) \quad (21)$$

por otro lado para ω grande se sabe que la trayectoria en el espacio de fases está acotada, así que la norma 20 ha de ser finita. Esto sugiere que el término integral ha de comportarse como $e^{-\omega_0 t}$ para que la expresión completa converja. Entonces:

$$\left\| \left(\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right) \right\| = e^{\omega_0 t} |\alpha| e^{-\omega_0 t} = |\alpha|, \quad (t \text{ grande y } \omega \text{ grande}) \quad (22)$$

donde $|\alpha|$ toma un valor máximo $|\alpha|_{\max}$.

Referencias

- [1] “Inverted pendulum,” Citado el 31 de Mayo del 2022. [Online]. Available: <https://myphysicslab.com/pendulum/inverted-pendulum-en.html>
- [2] A. Baiti, M. Zakarijah, N. Ahwan *et al.*, “The design of inverted pendulums as learning sources of adaptive control,” vol. 1413, no. 1, p. 012009, 2019.
- [3] M. Levi and W. Weckesser, “Stabilization of the inverted linearized pendulum by high frequency vibrations,” *SIAM Review* 1995-jun vol. 37 iss. 2, vol. 37, jun 1995. [Online]. Available: libgen.li/file.php?md5=5b10553723293746f241d4ec464abca8

-
- [4] Kapitza, “Dynamic stability of a pendulum when its point of suspension vibrates,” p. 588–597, 1951.
- [5] P. L. Kapitza, “Pendulum with a vibrating suspension,” pp. 7–15, 1951.