

Equilibrio Caótico: Péndulo Invertido

Victor Guzmán - UCV/UC

LA-CoNGA-physics

guzmanvictor1993@gmail.com

1 de junio de 2022



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea





Introducción

Ecuación de Movimiento y Solución Auto-Consistente

Lagrangiana y ecuación de movimiento

Solución auto-consistente: Reinterpretación en forma integral

Simulación

Desplazamiento angular en el tiempo

Espacio de fases

Perturbaciones, Error y Comportamiento para t Grande

Perturbación en el espacio de fases

Perturbación como un error/incertidumbre en la medida

Intervalos de tiempo grandes y evolución del sistema

Estabilidad y cota para las distancias en el espacio de fases

Introducción



Péndulo invertido - Péndulo de Kapitza

Existen distintas versiones y aproximaciones a este sistema como por ejemplo:

- ▶ Carro acelerado: Control adaptativo[1].
- ▶ Problema linealizado y de gravedad cero[2].

La versión que se estudiará acá se conoce como el péndulo de Kapitza[3, 4], del cual se tiene una animación en [▶ Link](#) [5].

Ecuación de Movimiento y Solución Auto-Consistente



Lagrangiana, ecuación de movimiento y parámetros

La lagrangiana del sistema para ($A \ll L$):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mA\omega\theta \sin(\omega t) \sin\theta - mg[A \cos(\omega t) + l \cos\theta]$$

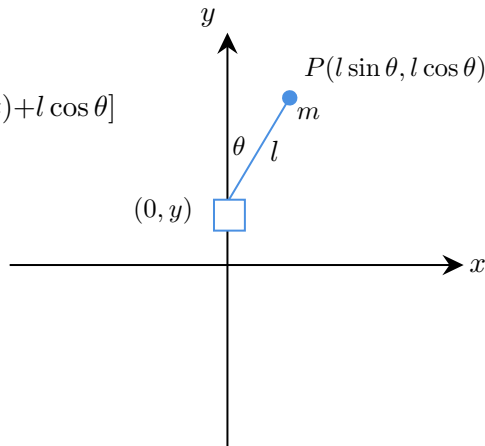
La ecuación de movimiento que se obtiene para ángulos pequeños es:

$$\ddot{\theta} - \omega_0^2\theta = -\eta\omega^2\theta \cos(\omega t) \quad (1)$$

donde:

$$\frac{A}{l} := \eta \quad (\text{Caracteriza la escala espacial})$$

$$\frac{g}{l} := \omega_0^2 \quad (\text{Frecuencia natural de vibración})$$





Solución auto-consistente: Forma integral de la ecuación

La solución exacta de θ usando la transformada de Laplace es:

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \sinh(\omega_0 t) + \theta_0 \cosh(\omega_0 t) - \frac{\eta \omega^2}{\omega_0} \int_0^t \theta(\tau) \cos(\omega \tau) \sinh[\omega_0(t - \tau)] d\tau \quad (2)$$

- ▶ Condiciones iniciales como factores de escala del comportamiento hiperbólico.
- ▶ Evolución dependiente de la historia previa de θ por medio de la integral.

Se puede obtener una expresión similar para $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \cosh(\omega_0 t) + \theta_0 \omega_0 \sinh(\omega_0 t) - \eta \omega^2 \int_0^t \theta(\tau) \cos(\omega \tau) \cosh[\omega_0(t - \tau)] d\tau \quad (3)$$

Simulación



Código

Al ejecutar el código introduciendo las condiciones iniciales y constantes:
 $\theta_0 = 0,001\text{rad}$, $\dot{\theta}_0 = 0\text{rad/s}$, $l = 0,05\text{m}$, $A = 0,01$, $t_0 = 0\text{s}$, $t_f = 10\text{s}$, $\omega = 400\text{rad/s}$ y
con $N = 10000$ instantes de tiempo se obtienen las gráficas:

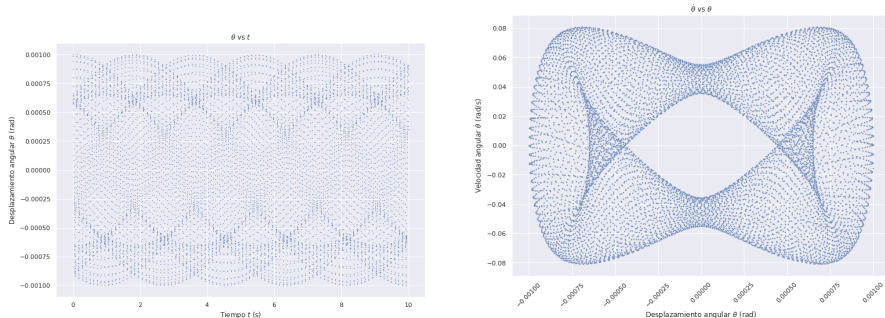


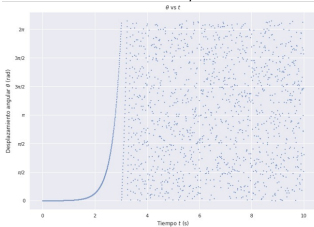
Figura: La figura de la izquierda muestra la gráfica de θ vs t y la de la derecha la gráfica de $\dot{\theta}$ vs θ



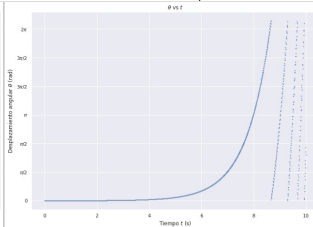
Simulación: Comportamiento del sistema y desplazamiento angular

$$\theta_0 = 0.001 \text{ rad}, \quad \dot{\theta}_0 = 0 \text{ rad/s}, \quad l = 1 \text{ m}, \quad A = 0.01 \text{ m}$$

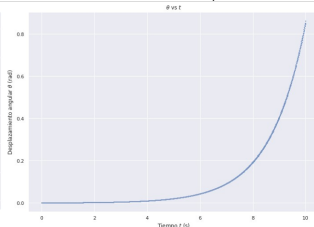
$\omega = 1 \text{ rad/s}$



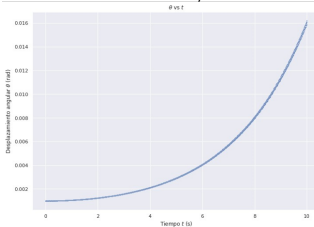
$\omega = 415 \text{ rad/s}$



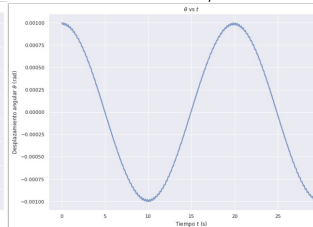
$\omega = 430 \text{ rad/s}$



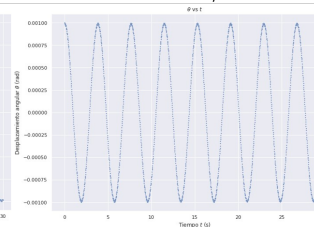
$\omega = 440 \text{ rad/s}$



$\omega = 445 \text{ rad/s}$



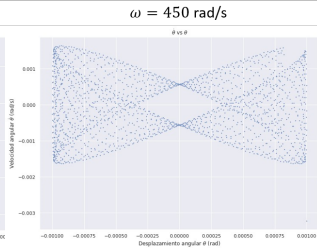
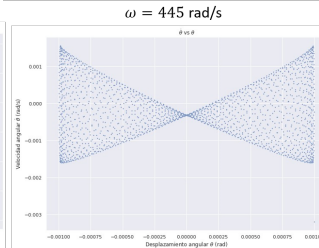
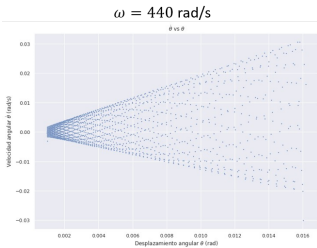
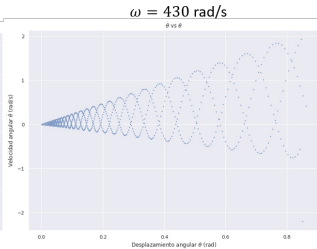
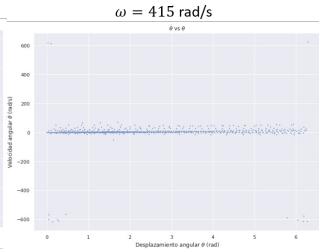
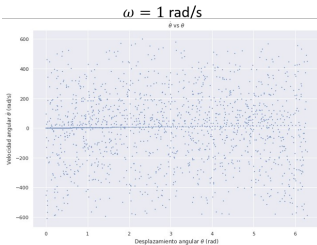
$\omega = 450 \text{ rad/s}$





Espacio de fases

$$\theta_0 = 0.001 \text{ rad}, \quad \dot{\theta}_0 = 0 \text{ rad/s}, \quad l = 1 \text{ m}, \quad A = 0.01 \text{ m}$$



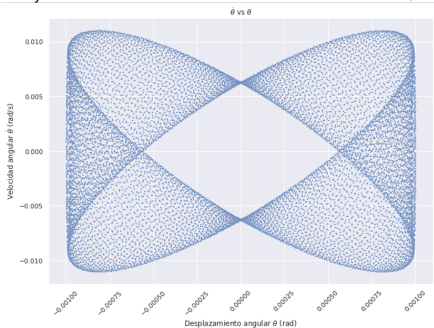


Espacio de fases: Altas frecuencias, evolución temporal

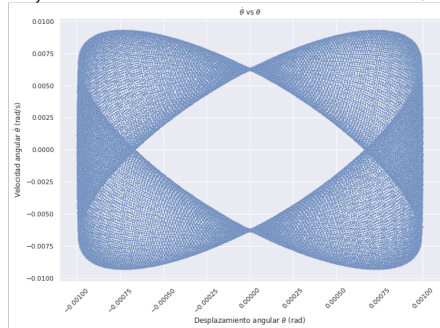
- ▶ Evolución en una región acotada (altas frecuencias).
- ▶ No pasa dos veces por el mismo lugar.
- ▶ Desplazamiento angular acotado por $\pm\theta_0$.

$$\theta_0 = 0.001 \text{ rad}, \quad \dot{\theta}_0 = 0 \text{ rad/s}, \quad l = 1 \text{ m}, \quad A = 0.01 \text{ m}$$

$$t_f = 10 \text{ s}, \quad N = 14000, \quad \omega = 1000 \text{ rad/s}$$



$$t_f = 100 \text{ s}, \quad N = 70000, \quad \omega = 1000 \text{ rad/s}$$



Perturbaciones, Error y Comportamiento para t Grande



Estado perturbado y distancia en el espacio de fases I

Partiendo de la ecuación auto-consistente 2, se realiza una pequeña perturbación del estado inicial en el espacio de fases.

- Definición de un estado: $\Gamma(\theta, \dot{\theta}/\omega_0)$
- Estado perturbado: $\Gamma'(\theta_0 + \delta\theta, (\dot{\theta}_0 + \delta\dot{\theta})/\omega_0)$

El estado perturbado es cercano a Γ_0 , en el sentido en que:

$$\|\Gamma - \Gamma_0\| = \sqrt{(\theta_0 + \delta\theta - \theta_0)^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_0 + \delta\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{(\delta\theta)^2 + \left(\frac{\delta\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2} \approx 0 \quad (4)$$

Si el sistema inicia en el estado perturbado Γ' :



Estado perturbado y distancia en el espacio de fases II

$$\begin{aligned}\theta'(t) = & \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \sinh(\omega_0 t) + \theta_0 \cosh(\omega_0 t) - \frac{\eta \omega^2}{\omega_0} \int_0^t \theta'(\tau) \cos(\omega \tau) \sinh[\omega_0(t - \tau)] d\tau + \dots \\ & \dots + \frac{\delta \dot{\theta}}{\omega_0} \sinh(\omega_0 t) + \delta \theta \cosh(\omega_0 t)\end{aligned}\quad (5)$$

- ▶ Los términos adicionales son proporcionales a la perturbación
- ▶ Proporcionales a las funciones hiperbólicas (no acotadas)

dado un t suficientemente grande en el sentido $\omega_0 t \gg 1$, la contribución del estado inicial modificará el comportamiento de la función.



Perturbación interpretada como un error

Hay otra manera de interpretar la ecuación 2, pensando en las condiciones iniciales como una medida junto a un error $\theta_0 = \theta_{m,0} \pm \delta\theta$ y $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_{m,0} \pm \delta\dot{\theta}$. Visto de esa manera entonces:

$$\begin{aligned}\theta(t) = & \frac{\dot{\theta}_{m,0}}{\omega_0} \sinh(\omega_0 t) + \theta_{m,0} \cosh(\omega_0 t) - \frac{\eta\omega^2}{\omega_0} \int_0^t \theta(\tau) \cos(\omega\tau) \sinh[\omega_0(t - \tau)] d\tau + \dots \\ & \dots + \frac{\delta\dot{\theta}}{\omega_0} \sinh(\omega_0 t) + \delta\theta \cosh(\omega_0 t)\end{aligned}\quad (6)$$

se puede interpretar esto como que dado un *tiempo suficientemente grande* los errores en establecer las condiciones iniciales pueden hacer que el sistema evolucione de una manera diferente en cada repetición del experimento.



Tiempos grandes en qué sentido

En la ecuación 2 para $\omega_0 t \gg 1$, tal que $\sinh(\omega_0 t) = \cosh(\omega_0 t) = \frac{1}{2}e^{\omega_0 t}$ y $\sinh[\omega_0(t - \tau)] = \sinh(\omega_0 t) \cosh(\omega_0 \tau) - \sinh(\omega_0 \tau) \cosh(\omega_0 t) = e^{\omega_0(t-\tau)}$:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \right) e^{\omega_0 t} - \frac{\eta \omega^2}{\omega_0} \int_0^t \theta(\tau) \cos(\omega \tau) e^{\omega_0(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{\omega_0 t} \left[\frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \right) - \frac{\eta \omega^2}{\omega_0} \int_0^t \theta(\tau) \cos(\omega \tau) e^{-\omega_0 \tau} d\tau \right]\end{aligned}\quad (7)$$

haciendo un procedimiento similar para $\dot{\theta}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\theta}(t)}{\omega_0} &= \frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \right) e^{\omega_0 t} - \frac{\eta \omega^2}{\omega_0} \int_0^t \theta(\tau) \cos(\omega \tau) e^{\omega_0(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{\omega_0 t} \left[\frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \right) - \frac{\eta \omega^2}{\omega_0} \int_0^t \theta(\tau) \cos(\omega \tau) e^{-\omega_0 \tau} d\tau \right]\end{aligned}\quad (8)$$



Estabilidad y cota para las distancias en el espacio de fases

nótese que:

$$\left\| \left(\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right) \right\| = e^{\omega_0 t} \sqrt{2} \left| \frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \right) - \frac{\eta \omega^2}{\omega_0} \int_0^t \theta(\tau) \cos(\omega \tau) e^{-\omega_0 \tau} d\tau \right| \quad (9)$$

Se espera que el espacio de fases esté acotado para altas frecuencias y que no esté acotado para bajas frecuencias. Esto puede entenderse como que para ω grande la distancia 9 es finita y para ω pequeño ha de diverger.



Regiones de estabilidad para grandes tiempos

Para ω pequeño la contribución del término integral es despreciable 10 y domina el comportamiento exponencial:






$$\left\| \left(\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \right| e^{\omega_0 t}, \quad (t \text{ grande y } \omega \text{ pequeño}) \quad (10)$$

por otro lado para ω grande se sabe que la trayectoria en el espacio de fases está acotada, así que la norma 9 ha de ser finita. Esto sugiere que el término integral ha de comportarse como $e^{-\omega_0 t}$ para que la expresión completa converja. Entonces:

$$\left\| \left(\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right) \right\| = e^{\omega_0 t} |\alpha| e^{-\omega_0 t} = |\alpha|, \quad (t \text{ grande y } \omega \text{ grande}) \quad (11)$$

donde $|\alpha|$ toma un valor máximo $|\alpha|_{\max}$.



-  AA Baiti, M Zakarijah, N Ahwan, et al.
The design of inverted pendulums as learning sources of adaptive control.
1413(1):012009, 2019.
-  Mark Levi and Warren Weckesser.
Stabilization of the inverted linearized pendulum by high frequency vibrations.
SIAM Review 1995-jun vol. 37 iss. 2, 37, jun 1995.
-  Kapitza.
Dynamic stability of a pendulum when its point of suspension vibrates.
page 588–597, 1951.
-  P. L. Kapitza.
Pendulum with a vibrating suspension.
pages 7–15, 1951.
-  Inverted pendulum, Citado el 31 de Mayo del 2022.