

# Estimando la aceleración de gravedad mediante la oscilación de un péndulo

**López Oscar Danilo<sup>\*</sup>**  
**Seijas Donovan Paul<sup>\*\*</sup>**

*Universidad Industrial de Santander*

*Cra. 27 Calle 9 Ciudad Universitaria, Bucaramanga, Santander, Colombia*

24 de julio de 2023

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>2</b>
<b>3. Metodología</b>	<b>2</b>
<b>4. Resultados</b>	<b>3</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>10</b>
<b>6. Referencias</b>	<b>11</b>

## 1. Introducción

En este experimento tenemos como objetivo estimar la aceleración de la gravedad en Bucaramanga. Esto a partir del análisis del movimiento de un péndulo, y las variables que intervienen en este. Realizaremos un primer paso de experimentación, realizando el movimiento pendular con distintas longitudes, tomando los datos de cada experimento y creando luego un código para poder hallar el valor de la gravedad a partir de los datos obtenidos de la experimentación.

Además de ello estimaremos los márgenes de error de la experimentación, y desarrollaremos un análisis a cerca del movimiento del péndulo y la variables de las cuales depende. Realizando gráficas del movimiento y tablas con los datos del movimiento.

---

<sup>\*</sup>e-mail: [oscar2230659@correo.uis.edu.co](mailto:oscar2230659@correo.uis.edu.co)

<sup>\*\*</sup>e-mail: [donovan2230667@correo.uis.edu.co](mailto:donovan2230667@correo.uis.edu.co)

## 2. Marco teórico

El péndulo simple es un sistema físico ampliamente estudiado que consiste en una masa suspendida de un punto fijo mediante un hilo o una vara de longitud  $L$ . Para el estudio del pendulo simple se realiza una serie de suposiciones para simplificar el analisis y poder llegar a soluciones más claras. La primera suposición es que el péndulo se considera un sistema sin fricción, lo que implica que no hay fuerzas disipativas que actúen sobre la masa oscilante. Además, se supone que el hilo es perfectamente rígido y sin masa, lo que significa que no se deforman y no agregan masa adicional al sistema.

El movimiento del péndulo simple se describe como un movimiento armonico simple, en el cual se establece que la aceleración angular es proporcional al ángulo de desplazamiento. El periodo de un péndulo simple está relacionado con su longitud  $L$  y la aceleración debido a la gravedad  $g$ .

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Esta formula establece que el periodo del pendulo es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud y directamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración debido a la gravedad.

Para el experimento se utilizó el método de linealización por medio de logaritmo natural ( $\ln$ ) con el fin de convertir la fórmula en una función lineal. Ya con los datos linealizados, se aplicó el método de optimización de mínimos cuadrados para el análisis numérico.

$$g = \left(\frac{2\pi}{e^A}\right)^2$$

Con esta fórmula se logra encontrar el valor para  $g$ , en función de la variable  $A$ , la cual es valor del polyfit encontrado a partir de la linealización de los datos.

## 3. Metodología

Iniciamos con la experimentación construyendo nuestro péndulo, como cuerda para nuestro modelo empleamos hilo de nailo y dos masas distintas. La primera masa empleada fue una goma de borrar con una masa de aproximadamente 5 gr. La segunda masa usada fue una tuerca de metal de una masa de 44 gr. Realizamos la toma de periodos para 8 longitudes distintas con cada masa, por lo que íbamos variando la longitud del nailo en las siguientes medidas: 14cm, 16cm, 18cm, 22cm, 24cm, 26cm, 28cm y 30cm.

A la hora de la toma de datos nos ayudamos de un cronómetro. Dejamos al péndulo realizar 5 oscilaciones y tomamos el tiempo que tarda en realizarlas, esto lo repetimos 4 veces para cada longitud, con cada masa. De esta manera logramos obtener unos datos un poco más exactos a diferencia de tomar el tiempo de una sola oscilación. Estos datos los pasamos a python, en donde

realizamos unos arreglos de numpy de los datos recolectados para cada longitud. Dividimos cada arreglo entre 5 (el tiempo que teníamos era lo que tardaba el péndulo en realizar 5 oscilaciones), obteniendo el periodo en cada medición. Luego de esto encontramos el periodo promedio para cada longitud con su respectiva masa, esto nos permitió comparar los periodos de las dos masas distintas que oscilaron con una misma longitud.

Con los datos listos continuamos con el código para poder encontrar la gravedad a partir de los datos que ya conocemos. Para esto se aplicó logaritmo natural a los periodos y a las longitudes de la cuerda, gracias a esto se logró utilizar el método de optimización de mínimos cuadrados, de esta manera logramos hallar la pendiente de la curva y la intersección en el eje  $y$ , lo cual fue empleado para evaluar la magnitud de la gravedad. A continuación se presenta el proceso de linealización, donde  $T$  es periodo,  $g$  es gravedad y  $L$  es la longitud.

$$T = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}} \quad (1)$$

$$\ln(T) = \ln(\sqrt{L}) - \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) \quad (2)$$

$$\ln(T) = \frac{1}{2} \ln(L) - \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) \quad (3)$$

Para efectos prácticos llamaremos  $\ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right)$ , como  $A$ , y  $\ln(L)$  como  $X$  quedando de la siguiente manera la ecuación:

$$\ln(T) = \frac{1}{2}X - A \quad (4)$$

En la segunda parte del experimento realizamos 3 grabaciones del movimiento de un péndulo, con un ángulo grande de amplitud. El péndulo era el mismo empleado en la primera parte, con la cuerda de nylon y una tuerca como masa oscilante. La grabación se realizó con un dispositivo móvil el cual grabó a calidad de 720p con 30 fps. Cada video lo subimos al programa tracker, donde logramos hacerle un seguimiento fotograma a fotograma del ángulo que iba realizando el péndulo en su movimiento. Extrajimos los datos de tracker de las 3 tomas y esto nos sirvió para realizar un análisis del movimiento del péndulo, en base de la variación del ángulo en función del tiempo, y de esta manera compararlo con los modelos anteriormente planteados.

## 4. Resultados

En las siguientes tablas podemos observar los datos recopilados en cada experimento. (Figura 1 y Figura 2). Cada tabla recopila los periodos obtenidos por cada masa dependiendo de la longitud del péndulo. Para cada longitud realizamos 4 tomas, por lo que por cada longitud tenemos 4 datos del periodo. En la última columna podemos encontrar el promedio de los periodos para dicha longitud, este valor es el promedio que tarda dicha masa en realizar una oscilación con su respectiva longitud.

LONGITUD (cm)	T1 (s)	T2 (s)	T3 (s)	T4 (s)	T promedio(s)
14	0.852	0.848	0.85	0.864	0.853
16	0.938	0.932	0.886	0.946	0.925
18	0.976	0.938	0.976	0.977	0.966
22	1.09	1.048	1.054	1.062	1.0635
24	1.08	1.082	1.112	1.124	1.099
26	1.164	1.122	1.146	1.142	1.143
28	1.178	1.16	1.162	1.184	1.171
30	1.232	1.242	1.202	1.234	1.227

*Figura 1: Tabla de los datos del periodo de la masa 1 oscilando con distintas longitudes.*

LONGITUD (cm)	T1 (s)	T2 (s)	T3 (s)	T4 (s)	T promedio (s)
14	0.8	0.804	0.808	0.79	0.8005
16	0.832	0.836	0.834	0.836	0.8345
18	0.884	0.882	0.886	0.88	0.883
22	0.974	0.984	0.976	0.976	0.9775
24	1.028	1.026	1.032	1.028	1.0285
26	1.052	1.034	1.03	1.048	1.041
28	1.086	1.088	1.086	1.092	1.088
30	1.14	1.148	1.142	1.142	1.140

*Figura 2: Tabla de los datos del periodo de la masa 2 oscilando con distintas longitudes.*

Si comparamos los datos de ambas tablas, podemos notar que ambos péndulos a pesar de tener masas distintas oscilando, los periodos son muy similares y en algunos casos casi iguales. Un ejemplo es el caso del T promedio para una longitud de 14 cm, la masa 1 tuvo un periodo de 0.853 segundos, mientras que la masa 2 tuvo un periodo de 0.8005 segundos, la diferencia entre ambos periodos es de 0.0525 segundos, un valor bajo, que se le podría llegar atribuir al error de la medición en ambos experimentos. Lo que nos deja demostrar que la masa del objeto no afecta el periodo de oscilación del péndulo, pues con dos masas distintas pero con longitudes iguales, los periodos fueron casi iguales.

A partir de los datos de los periodos que ya recopilamos, logramos realizar una gráfica que muestra el cambio del periodo en función de la longitud que le íbamos asignando a la cuerda del péndulo. A continuación podemos observar dicha gráfica en la Figura 3.

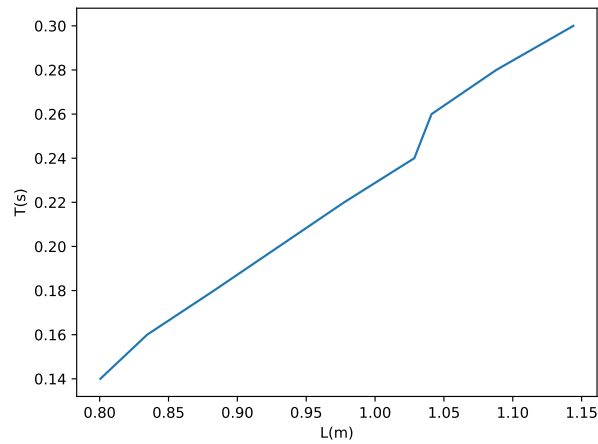


Figura 3: Gráfica del periodo ( $T$ ) en función de la longitud ( $L$ )

Con los datos del periodo en función de la longitud listos, pudimos también hallar el error en estos con ayuda del comando de `numpy.std`. De esta manera logramos hallar la desviación estándar en nuestro experimento, y el error de este mismo. En la Figura 4 podemos observar una gráfica con las barras de error.

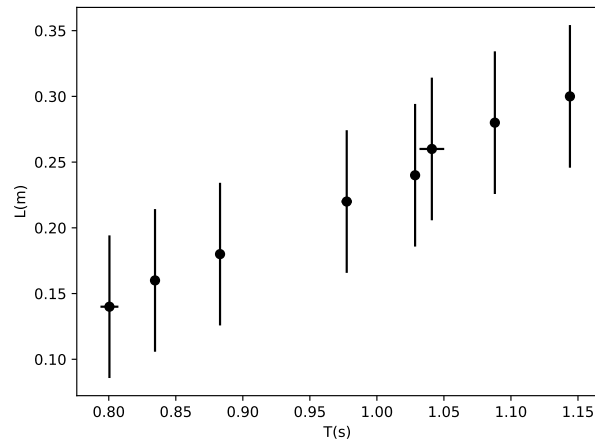


Figura 4: Gráfica del margen de error del Periodo ( $T$ ) en función de la longitud ( $L$ )

Luego de tener los datos del periodo en función de la longitud del péndulo, realizamos la linealización de estos mismos con ayuda de logaritmo natural, obteniendo la siguiente gráfica de los datos linealizados. (Figura 5)

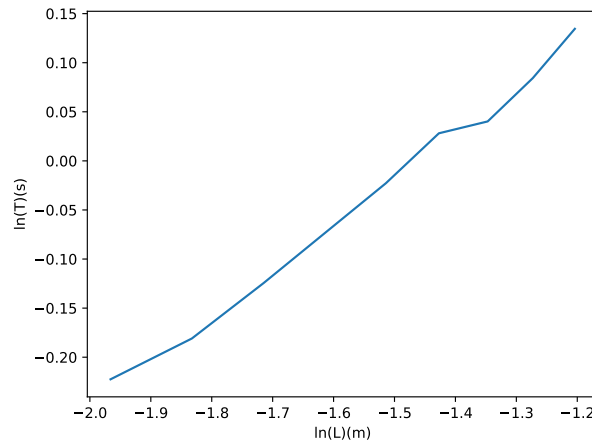


Figura 5: Gráfica linealizada del periodo ( $T$ ) en función de la longitud ( $L$ )

Tras la optimización de los datos por medio del uso de mínimos cuadrados, obtenemos un valor  $A = 0,68472351$  de la ecuación

$$\ln(T) = \frac{1}{2}X - A$$

Recordando que  $A = \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right)$ , podemos despejar  $g$  con el fin de conseguir su valor.

$$A = \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) \quad (5)$$

$$e^A = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \quad (6)$$

$$\sqrt{g} = \frac{2\pi}{e^A} \quad (7)$$

$$g = \left(\frac{2\pi}{e^A}\right)^2 \quad (8)$$

Reemplazando los valores de  $A$  obtenemos el valor de la gravedad  $g = 10,037289568148584 \frac{m}{s^2}$

A continuación podemos observar las gráficas obtenidas de los datos recopilados en la segunda parte del experimento. Estos datos fueron sacados del análisis realizado en tracker, y cada gráfica representa una de las tomas realizadas, la variable es el ángulo ( $\theta$ ) en función del tiempo ( $t$ ) a lo largo de una oscilación del péndulo. (Figura 6.1, Figura 6.2, Figura 6.3).

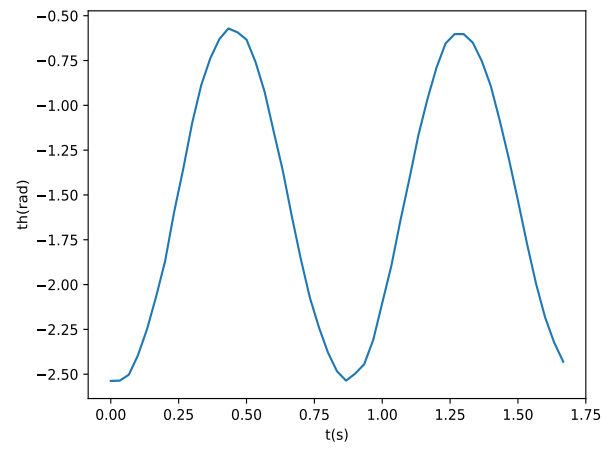


Figura 6.1: Gráfica ángulo( $\theta$ ) en función del tiempo ( $t$ )

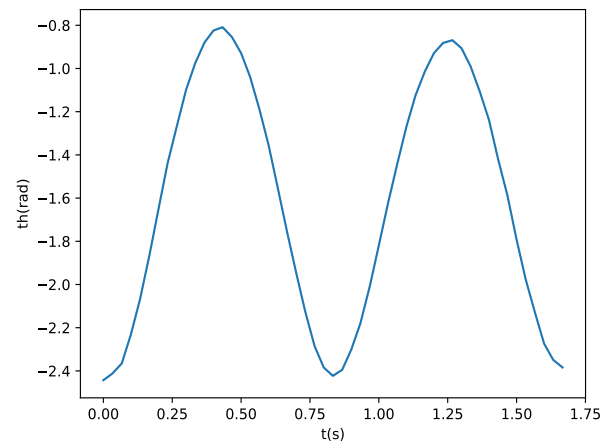


Figura 6.2: Gráfica ángulo( $\theta$ ) en función del tiempo ( $t$ )

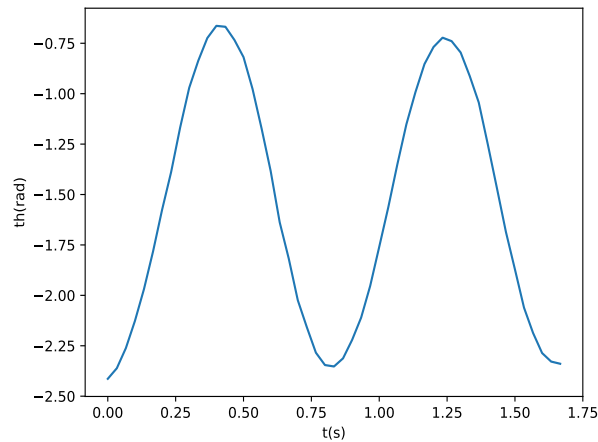


Figura 6.3: Gráfica ángulo( $\theta$ ) en función del tiempo ( $t$ )

Con los datos de las tres tomas listas, decidimos promediarlos, de esta manera obtuvimos una sola gráfica que nos muestra el movimiento del péndulo, con los datos promediados. Por lo que es una gráfica un poco más exacta que las anteriores. (Figura 7)

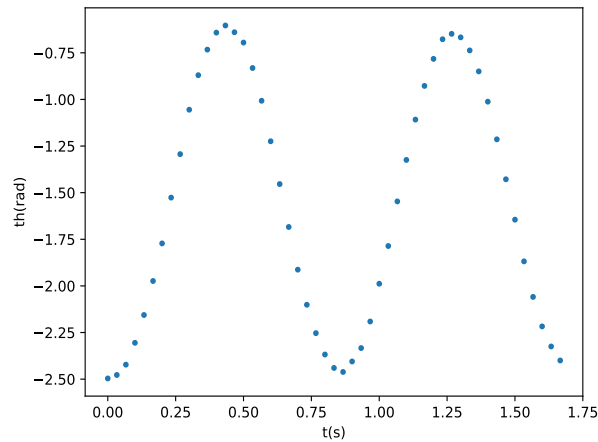


Figura 7: Gráfica de los datos promediados del ángulo( $\theta$ ) en función del tiempo ( $t$ )

En la siguiente gráfica se presenta el error el cual fue calculado, para la gráfica de la Figura 7. En esta gráfica se presenta error del ángulo ( $\theta$ ) en función del tiempo, además aparecen graficadas las barras de error.



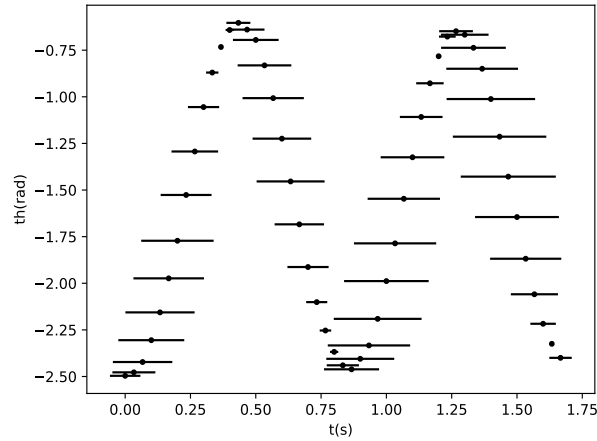


Figura 8: Gráfica del margen de error del ángulo ( $th$ ) en función del tiempo ( $t$ )

A continuación se presenta un gráfico (Figura 9), en donde se presenta la comparación entre la gráfica obtenida por los datos del experimento, con otra gráfica que representa los datos obtenidos de manera analítica por medio de las siguientes ecuaciones:

1. Ecuación para ángulos pequeños

$$\frac{d\theta}{dt} = w$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-g}{L} \cdot \theta$$

2. Ecuación para ángulos grandes

$$\frac{d\theta}{dt} = w$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-g}{L} \cdot \sin \theta$$

En la siguiente gráfica se ven plasmadas 3 distintas líneas, la cual cada una representa los datos del movimiento pendular hallado por distintos métodos. La línea azul representa el movimiento, siendo calculado a partir de la ecuación para ángulos grandes. La línea naranja representa el movimiento, siendo calculado a partir de la ecuación para ángulos pequeños. La línea punteada verde representa el movimiento obtenido a partir de los datos experimentales

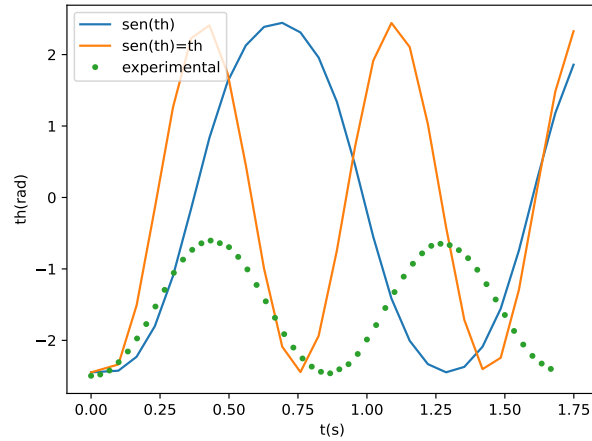


Figura 9: Comparación de la gráfica de los datos obtenidos a partir del experimento, con las gráficas de los datos analíticos

Podemos observar el desfase que existen entre las gráficas, pero también que la más cercana a los datos experimentales, es el obtenido a partir de la ecuación para ángulos grandes, ecuación en la cual se usa la función *sen* del ángulo.

## 5. Conclusiones

A partir del experimento logramos comprobar que la masa oscilante del péndulo no influye, en su periodo ni en el mismo movimiento, pues realizamos el experimento para dos péndulos con distintas masas, y los periodos fueron casi iguales. Lo que nos dejó claro que la masa no es un factor influyente en el movimiento de un péndulo.

Se logró estimar un valor cercano a la gravedad a partir de los datos obtenidos por el movimiento pendular, gracias a la linealización de los datos. Obteniendo el siguiente valor  $g = 10,038 \frac{m}{s^2}$ , que aunque no es exactamente el correcto, es un valor bastante cercano al real. También se logró hallar el error de nuestro experimento, con ayuda del código en python, llegando a crear una gráfica con las barras de error.

Conseguimos distintos métodos para encontrar los datos que describen el movimiento del péndulo, para ángulos grandes y para ángulos pequeños, notando que en el primero se emplea la función *sen(th)* mientras que en el segundo se cambia por solamente *th*. Además comprobamos que el que arroja datos más cercanos a los experimentales, es el método a partir de las ecuaciones para ángulos grandes, donde se incluye la función trigonométrica del *seno*.

## 6. Referencias

Núñez, L. A., & Rago, H. (2023, julio). Estimando la aceleración de gravedad mediante la oscilación de un péndulo. <https://www.overleaf.com/project/5f232b0a5a3bd90001db5036>