

Estimando la aceleracion gravitacional y comparacion con valores teoricos del Péndulo

Gael G. Gonzalez y Luis E. Niño

Pregrado en Fisica

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga, Colombia

25 de julio de 2023

Índice

1. Introducción	2
2. Marco Teorico	2
3. Metodologia	3
3.1. Montaje	3
3.2. Modelo Numérico	3
3.2.1. Calculo de aceleracion gravitacional:	3
3.2.2. Gráfica variación angular con respecto al tiempo:	5
3.2.3. Comparación de la relación ángulo sobre tiempo:	5
4. Resultados	5
5. Analisis	8
5.1. Valores de la gravedad	8
5.2. Comparacion de graficas:	9

Resumen

Este informe es concebido como la recopilación y análisis del proyecto propuesto en la materia *Intr. a las herramientas computacionales de la física* en donde por medio de herramientas computacionales se hallará el valor de la aceleracion gravitacional al analizar el promedio de los periodos del movimiento oscilatorio de un pendulo con distintas longitudes de cuerda y masas, ademas de analizar por medio de *Tracker* la grabacion del movimiento oscilatorio de un pendulo con el fin de graficar los datos extraidos y compararlos con dos graficas teoricas del mismo escenario de la relacion del ángulo contra el tiempo, con el objetivo de llegar a valores lo mas cercanos a los ideales.

Se proyectan lecturas con un margen de error del 7 % con respecto a los valores reales de la gravedad y distancia contra tiempo en movimiento oscilatorio. Debido al tamaño de la muestra e imprecisiones en los instrumentos de medición.

Todos estos productos estan depositados en el ambiente MiLAB para garantizar su reproducibilidad.

1. Introducción

En el presente informe con el fin de extraer el valor de la aceleracion gravitacional al analizar el movimiento oscilatorio de un pendulo, para posteriormente graficar la relacion entre ángulo y tiempo; y compararla con funciones que describan este movimiento de manera ideal.

Los lanzamientos en los que el objeto de analisis sera el periodo, se dieron con dos masas y siete longitudes disntintas entre sí. Para analizar los datos extraidos los mismos pasaran por un arreglo lineal en *PYthon* con un proceso muy similar al realizado en el primer proyecto realizado.

La comparacion de la relacion ángulo tiempo sera realizada con los datos que se extraigan de la grabacion de un pendulo por medio de la aplicacion *Tracker*, los datos extraidos seran exportados a *Python* y su grafica se comparará con dos funciones de movimiento ocilatorio, una aproximada que usa el metodo de Euler y una para todo ángulo.

2. Marco Teorico

En el movimiento de un pendulo simple se involucra la longitud (l) y el valor de la acelecación de la gravedad (g) donde su periodo (P_o) está descrito pro la siguiente ecuación.

$$P_o = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$

En donde θ es el angulo en la que se lanza el pendulo con respecto a su posición de reposo. El movimiento del pendulo simple está descrito por una ecuación diferencial de segundo orden donde contiene como sus variables θ y ω , siendo esta el la velocidad angular de la particula durante su movimiento.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\text{sen}(\theta) = 0 \quad (2)$$

Se utiliza el método de euler para aproximar los valores para la solución de esta euación diferencial, que consiste en expresar la ecuación de segundo orden en dos ecuaciones de primer orden, que se involucren entre si, para en este caso, describir el movimiento de la particula en el pendulo simple.

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\text{sen}(\theta) \quad (3)$$

Para angulos de pequeña magnitud, es posible sustituir la expresión $\sin(\theta)$ por θ . Debido que en valores pequeños, el ángulo y el valor de la función seno evaluada en ese punto, son prácticamente iguales.

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\theta \quad (4)$$

De esta manera estas dos nuevas ecuaciones realizan una buena aproximación al movimiento de la partícula en el péndulo.

3. Metodología

3.1. Montaje

El experimento se realizó con un péndulo de laboratorio, con el cual se dejaba oscilar objetos de masas determinadas, variando la longitud de la cuerda y calculando sus periodos. Se realizó primeramente con una masa de 5 gramos, en la que se realizaron 5 lanzamientos donde se extrajo el periodo de oscilación, en una longitud inicial de 15 cm, posteriormente se realizó el mismo procedimiento con longitudes de 5 en 5 cm hasta llegar a 50 cm, con un total de 8 longitudes, donde a cada longitud, se le realizó el promedio de los periodos obtenidos anteriormente.

Para analizar la variación angular que tiene un péndulo, se realizó un video donde oscilara durante 3.5 segundos, para posteriormente, analizar computacionalmente el movimiento por medio de la aplicación Tracker, así obtener una tabla de cada uno de los ángulos que tiene el péndulo en cada fotograma, teniendo una velocidad de 24 fotogramas por segundo y un tamaño de paso de 0,333.

3.2. Modelo Numérico

Con los promedios de los datos, se realizó un arreglo en python para trazar una gráfica del periodo en función de las longitudes, para cada masa. Se analizarán los datos para principalmente sacar el valor de la gravedad y para comparar las gráficas del péndulo halladas experimentalmente contra las gráficas realizadas teóricamente por las ecuaciones descritas en (3)

3.2.1. Cálculo de aceleración gravitacional:

La aceleración de la gravedad en la tierra es aproximadamente $9,8 \frac{m}{s^2}$, esta será hallada de dos maneras para comparar su efectividad y asignar cual es más efectiva para el tipo de datos que se utilizan.

Linealización por logaritmo: Este método consiste en convertir la ecuación del periodo del péndulo simple, en una función lineal que contenga una pendiente y una intersección de la forma $Y = mx + b$. Para esto, se tomará la ecuación de (1) y se desarrollará con la función logaritmo natural.

$$P_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5)$$

$$\ln(P_0) = \ln\left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right) \quad (6)$$

$$\ln(P_0) = \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) + \frac{1}{2}\ln(l) \quad (7)$$

$$\ln(P_0) = \underbrace{\ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right)}_m + \frac{1}{2}\underbrace{\ln(l)}_b \quad (8)$$

De esta manera obtenemos nuestra función lineal de la forma:

$$y = m + \frac{1}{2}b \quad (9)$$

Ahora se despeja el valor de la gravedad:

$$m = \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) \Rightarrow e^m = e^{\ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right)} \quad (10)$$

$$e^m = e^{\ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right)} \quad (11)$$

$$e^m = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \quad (12)$$

$$g = \left(\frac{2\pi}{e^m}\right)^2 \quad (13)$$

La expresión en (13) dará una expresión experimental de la gravedad.

Ecuación periodo de un péndulo: Otra alternativa, menos fiel a la realidad, es despejar en cada instante que analizamos, la gravedad para luego promediar cada uno de los datos y hallar una gravedad experimental.

El calculo se realiza con el siguiente despeje y cada uno de los datos de longitu con su respectivo promedio de periodos:

$$P_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (14)$$

Con la expresión (16) Sustituyendo P_0 con T:

$$\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{l}{g}} \Leftrightarrow \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{l}{g} \quad (15)$$

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \quad (16)$$

La ecuación (16) representará la gravedad experimental en cada una de las longitudes en las que se realizó el experimento. Quedará hallar el promedio de todos los valores y así, hallar la gravedad experimental.

3.2.2. Gráfica variación angular con respecto al tiempo:

Gracias al programa tracker, se analizara una lista de datos en python y se generará una gráfica en función al ángulo. Se hace un modelo teórico con las ecuaciones expresadas en (3) para graficar con los parametros fijos longitud (l), gravedad (g) y tiempo (T) y posteriormente, se comparará las gráficas generadas. Se usará un ángulo grande de $40,1^\circ$ o $0,71$ radianes, para comprobar que la función mas adecuada es la que posee la identidad trigonométrica seno en su expresión, comprobando que para ángulos grandes, el seno del ángulo es diferente al ángulo utilizado. ola

3.2.3. Comparación de la relación ángulo sobre tiempo:

Los datos con los que hacer la grafica experimental se extraen con *Tracker* de una grabacion del pendulo, con la herramienta transportador para determinar un valor angular en cada fotograma de la grabacion, estos datos se exportan como una lista a *Python* y se grafican en este programa.

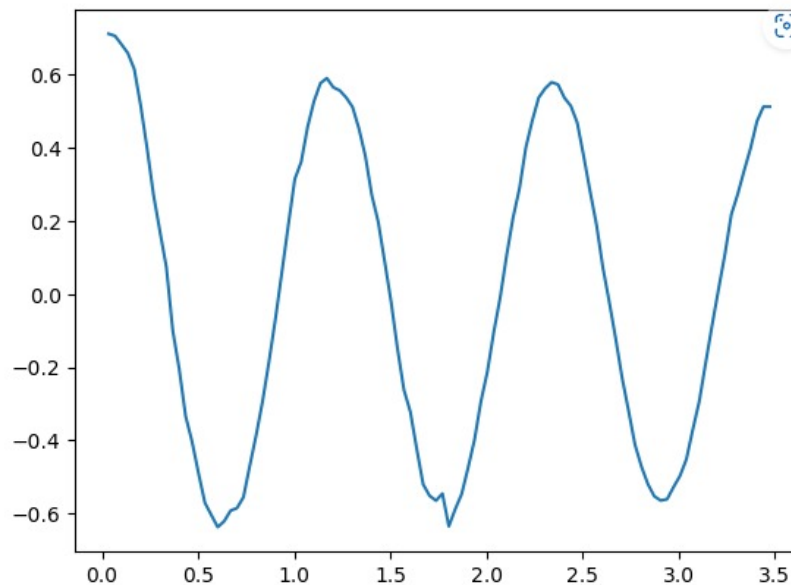


Figura 1: Gráfica del ángulo en función del tiempo

4. Resultados

Por medio de la libreria matplotlib de python generamos las gráficas de los periodos y sus longitudes en cada una de las masas y sus logaritmos naturales para la linealización.

Masa no.1 5 gramos y masa no.2 41 gramos:

Graficas variación angular: Siendo la gráfica naranja para ángulos grande y la azul para ángulos pequeños.

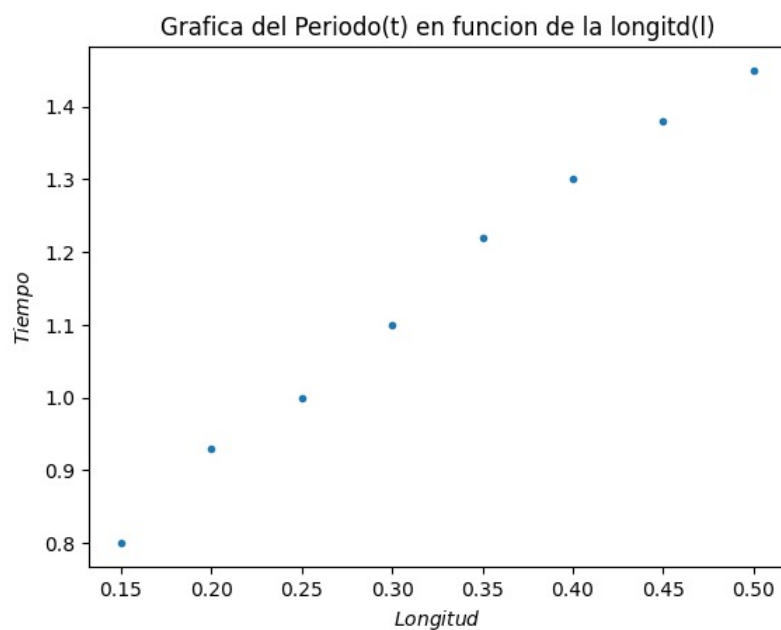


Figura 2: Gráfica periodo en función de longitud

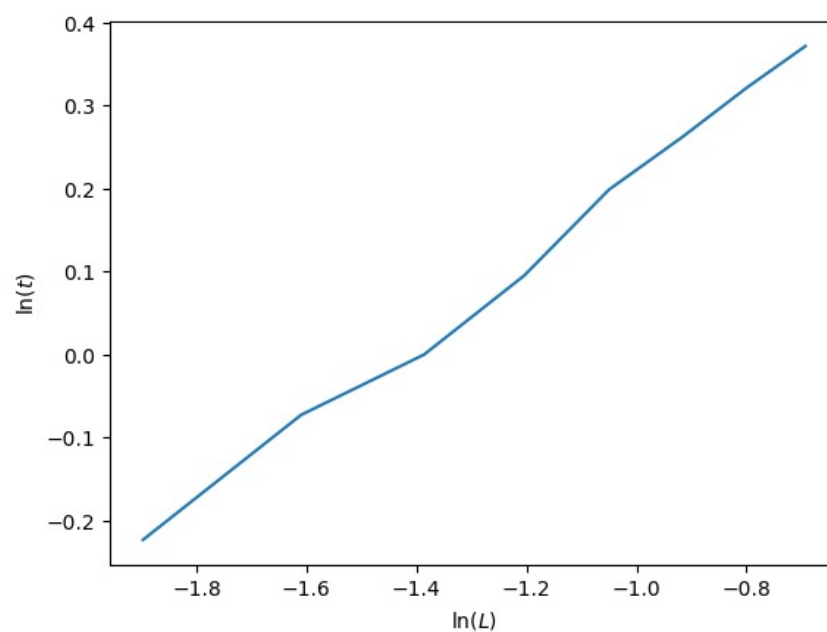


Figura 3: Linealización logaritmica masa 1

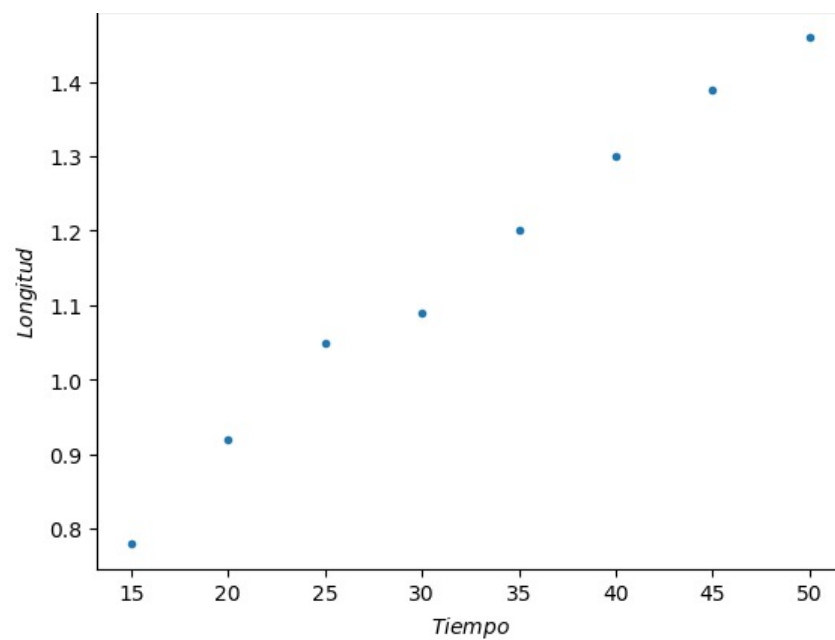


Figura 4: Masa 2 Gráfica periodo en función de longitud

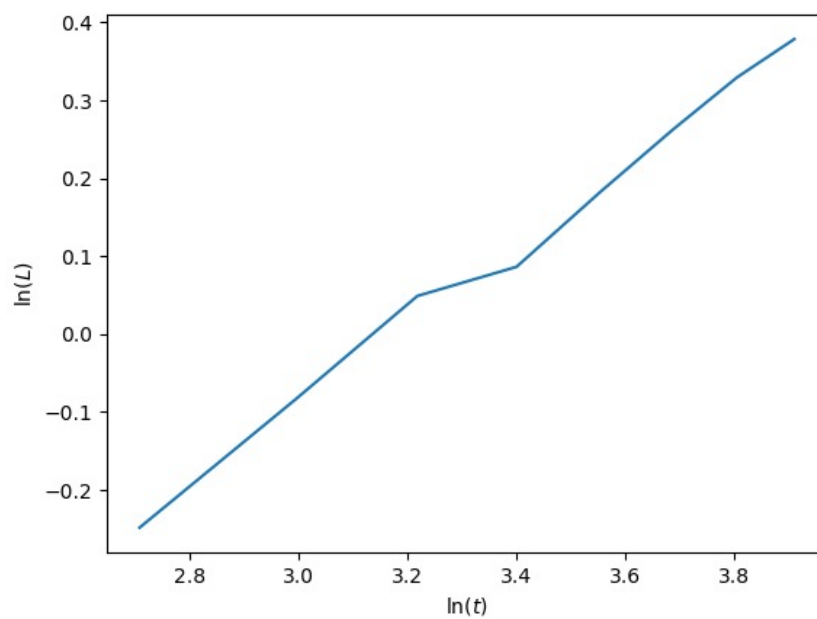


Figura 5: Linealización logarítmica masa 2

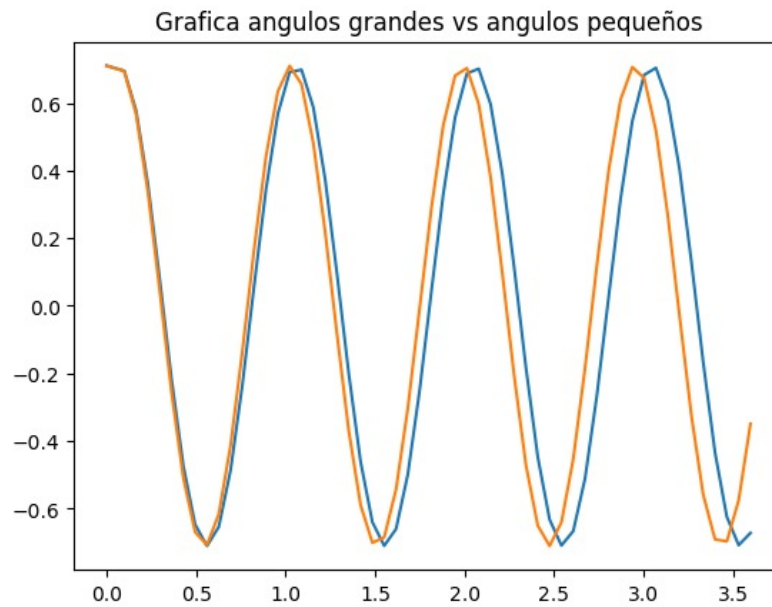


Figura 6: Gráficas solución ecuación diferencial pendulo

5. Analisis

5.1. Valores de la gravedad

:Al analizar la linealización logaritmica en cada una de las gráficas, el valor de m , que es la variable que brindará el valor de la gravedad, nos otorgaron los siguientes datos:

Masa 1	0.7205365233759982
Masa 2	0.8089355250262062

Cuadro 1: Gravedad experimental por logaritmo

Gravedad por ecuación: Por medio de la ecuación (16) se halló el promedio de todas los valores de la gravedad hallados, para concluir con un único valor de la aceleración gravitacional.

La gravedad experimental es:

$$9,438446489795236 \frac{m}{s^2} \quad (17)$$

Es importante analizar que en (1) hay un error bastante notable en el calculo de la gravedad, pues su resultado es menor que 1. Esto podrá deberse a la imperfección del sistema de medida y a la inxactitud que posee el método para generar una ecuación lineal en datos que tienen mucha diferencia entre sí (a expcección de una parabola). La ecuación de la gravedad funcionó con mayor exactitud, sin embargo se sigue quedando atrás por ser algo individual y usar meétodos de agrupación tan

ineficaces como una media aritmetica. Se recomienda reemplazar el método de linealización para hallar una gravedad mas exacta.

Para comprobar esto, poseemos esta gráfica que muestran los errores producidos en las tomas de cada uno de los datos:

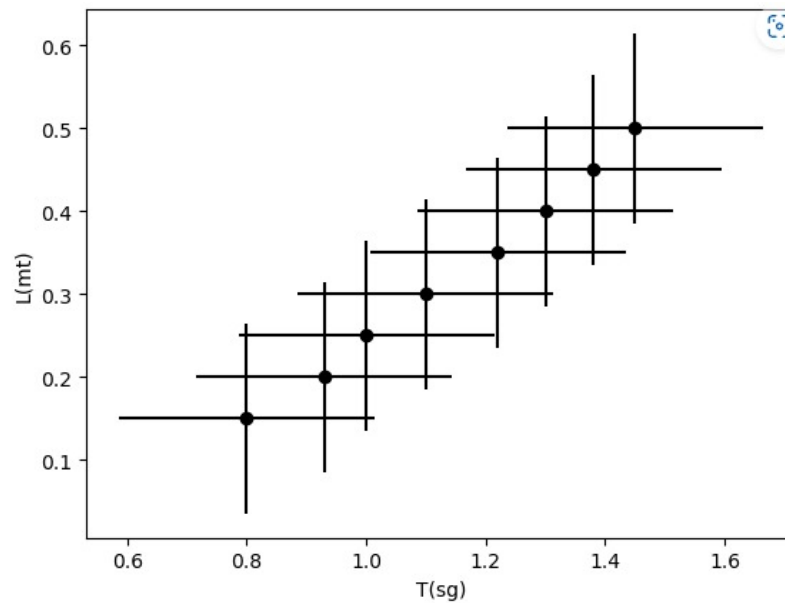


Figura 7: Errores en la gráfica de periodos (T) en función de longitudes (l).

Así concluimos que los datos al estar procesados por herramientas computacionales no tan eficientes, salen bastante erróneos y hacen que métodos como la linealización logarítmica, no sirvan con efectividad.

5.2. Comparación de gráficas:

Al graficar las funciones ideales con los mismos valores de ángulo de lanzamiento, longitud y masa; y compararlas con la experimental damos con la siguiente gráfica.

A pesar de las irregularidades en algunos valles y picos de la gráfica experimental se puede considerar como apropiada para la comparación, pues su comportamiento general obedece lo que se espera de este.

El desfase entre la gráfica experimental e ideales son de esperarse pues las mismas toman escenarios sin fuerzas externas que puedan alterar el movimiento del péndulo en mayor o menor medida, pero en los primeros instantes de las gráficas estas coinciden pues la resistencia del aire no ha afectado significativamente al péndulo.

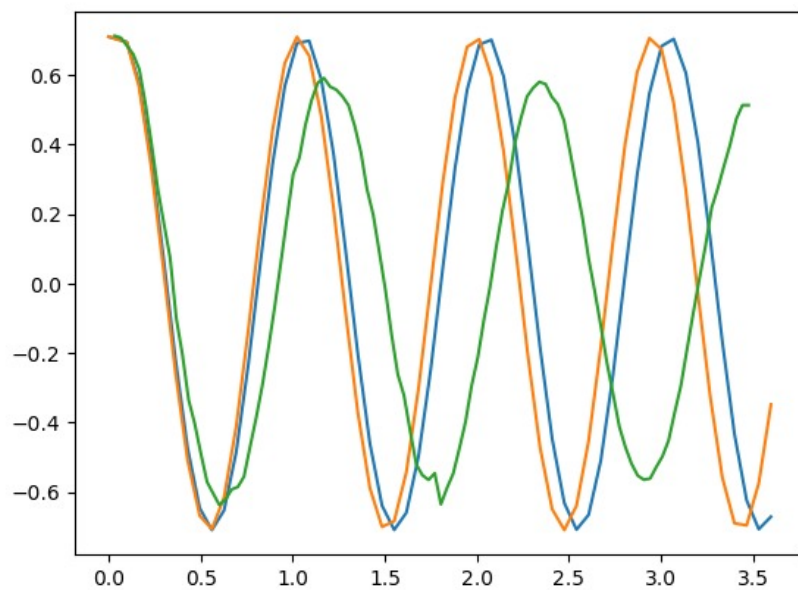


Figura 8: Comparacion de las graficas del ángulo sobre el tiempo