

Estimando la aceleración de la gravedad mediante la oscilación de un péndulo

Sergio Fajardo y Tomás Rocha
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia

19 de Julio del 2023

Índice

1. Introducción	2
2. Marco teorico	3
2.1. Amplitudes pequeñas	3
2.2. Amplitudes grandes	4
3. Metodología	4
3.1. Amplitudes pequeñas	5
3.2. Amplitudes grandes	5
4. El experimento y los resultados	5
4.1. Amplitudes pequeñas	5
4.2. Amplitudes grandes	9
5. Conclusiones y Recomendaciones	11
6. Material complementario	11
7. Referencias	11

Resumen

Este informe muestra como de forma experimental se pudo obtener una aproximación del valor de la aceleración gravitacional (g), ello logrado a partir de la oscilación de un péndulo simple. El objetivo principal, como mencionamos anteriormente era medir el valor de la gravedad, constante fundamental de la física. Para lo anterior se construyó un péndulo, el cual consistía en un primer momento de una Masa 1, equivalente a 0.6Kg y otra llamada Masa 2, equivalente a 1Kg, ambas atadas y suspendidas por una cuerda, a la cual se le vario su longitud. Se midió la longitud del hilo y el tiempo que tardo en realizar 4 oscilaciones. Los experimentos y toma de

datos se repitieron varias veces con el animo de mejorar la precisión y obtener mejores resultados.

Con base en datos experimentales y el análisis de la relación entre el período (T) en función de longitud del péndulo (L), la aceleración gravitatoria pudo hallarse de manera efectiva, este valor corresponde a $9,7782 \frac{m}{s^2}$, para la Masa 1 y $9,9485 \frac{m}{s^2}$ para la Masa 2, ambos resultados se compararon con el valor teórico $9,81 m/s$ para evaluar la exactitud y precisión del experimento.

A partir de ello, pudimos corroborar la eficacia y utilidad, en cuanto el uso del péndulo para hallar de manera experimental el valor de la aceleración de la gravedad. Durante este reporte experimental también se habla acerca de la precisión en cuanto se trata de hallar el valor de la aceleración de la gravedad a partir de la oscilación, cuando se trata de amplitudes pequeñas y grandes, es decir cuando el angulo de partida es grande o pequeño, en comparación con los resultados teóricos esperados, bajo la implementación de ciertos algoritmos computacionales, desarrollados en JupyterLab.

Abstract

This report shows how an approximation of the value of the gravitational acceleration (g) could be obtained experimentally from the oscillation of a simple pendulum. The main objective, as mentioned above, was to measure the value of gravity, the fundamental constant of physics. For this purpose, a pendulum was built, which consisted in a first moment of a Mass 1, equivalent to 0.6Kg and another called Mass 2, equivalent to 1Kg, both tied and suspended by a string, which was varied in length. The length of the string and the time it took to perform 4 oscillations were measured. The experiments and data collection were repeated several times in order to improve accuracy and obtain better results.

Based on experimental data and the analysis of the relationship between the period (T) as a function of pendulum length (L), the gravitational acceleration could be found effectively, this value corresponds to $9,7782 \frac{m}{s^2}$, for Mass 1 and $9,9485 \frac{m}{s^2}$ for Mass 2, both results were compared with the theoretical value $9,81 m/s$ to evaluate the accuracy and precision of the experiment.

From this, we were able to corroborate the effectiveness and usefulness of using the pendulum to experimentally find the value of the acceleration of gravity. During this experimental report we also talk about the accuracy in finding the value of the acceleration of gravity from the oscillation, when dealing with small and large amplitudes, i.e. when the starting angle is large or small, compared to the expected theoretical results, under the implementation of certain computational algorithms, developed in JupyterLab.

1. Introducción

Durante este reporte tecnico experimental, hablaremos entorno al experimento propuesto a desarrollar desde la escuela de Física durante este ciclo academico para los estudiantes de Física, primer semestre de la Universidad Industrial de Santander, este proyecto consistia inicialmente en el calculo aproximado de la aceleración de la gravedad en la ciudad de Bucaramanga a través de un modelado de pendulo, pero con el animo de variar un poco y saciar el animo de la inquietud

que se generó, acerca de que tanto cambia el valor de la aceleración de la gravedad entre ciudades, decidimos hacer nuestra toma de datos en el municipio de Charalá, ubicado en el departamento de Santander.

Para llevar a cabo este experimento se hizo necesario la toma de datos de la oscilación en un péndulo, sobre dos masas distintas, por un lado una de 0.6 Kg y otra de 1Kg, ambas suspendidas en un ángulo de 15 grados y en 8 longitudes de cuerda diferente, estas varían entre 0.3m y 1m, aumentando de 0.1m. Con el objetivo de obtener datos más precisos y con un margen de error menor, cada lanzamiento fue cronometrado en 5 momentos, para así luego obtener un promedio de ellos y ser más exactos.

Es por ello que durante todo este realizaremos comparaciones con el ánimo de que podamos notar si la gravedad realmente varía entre ciudades y si es así, cuán grande es esta diferencia. Así mismo, hablaremos acerca de los márgenes de error producidos arrojados por nuestros datos experimentales, con el ánimo y en pro de la reproducibilidad de este tipo de experimentos para la sociedad.

2. Marco teorico

Para llevar a cabo este reporte experimental y en general el experimento propuesto, hicimos uso de ciertas ecuaciones que nos permitieron lograr una mejor comprensión del movimiento a estudiar durante las oscilaciones del péndulo estudiado, y como este se ve afectado directamente por la aceleración de la gravedad.

2.1. Amplitudes pequeñas

Para iniciar, hicimos uso de la ecuación consiguiente, la cual hace referencia al periodo de un péndulo simple, y en la cual podemos apreciar como se ve relaciona directamente la gravedad, así también como con la longitud o el largo desde el cual el objeto pende del péndulo.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{G}} \quad (1)$$

Es importante rescatar que esta ecuación tiene completa validez cuando el ángulo del péndulo sea equivalente a menos de un radián.

Para este caso, en donde las oscilaciones son realmente pequeñas, podemos despejar el valor de la aceleración de la gravedad y obtener la siguiente ecuación descrita, con la cual podríamos tan solo reemplazando el periodo T y el largo de la cuerda L , verificar cual es el valor de la aceleración tanto en Bucaramanga, como en nuestro caso Charalá.

$$g \approx \frac{4\pi^2 L}{T^2} \quad (2)$$

Ahora, es necesario mencionar nuevamente que esta ecuación únicamente es válida para el caso de oscilaciones pequeñas, es decir aquellos casos donde el ángulo inicial sea menor a 1 radian.

2.2. Amplitudes grandes

Inicialmente consideraremos una amplitud grande, aquella que supere el valor correspondiente a 1 radián, para este caso en que las oscilaciones esten determinadas por un ángulo mayor a 1 radián, se introducen las siguientes ecuaciones, las cuales permitiran comprender mejor el movimiento que realiza el pendulo.

El movimiento de un péndulo del que pende un objeto de masa m atado a una cuerda de longitud L , puede expresarse en la siguiente ecuación:

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} \Rightarrow \begin{cases} ma_r = -T + mg \cos \theta \\ ma_t = -mg \sin \theta \end{cases} \quad (3)$$

Donde \vec{g} es la aceleración de la gravedad, \vec{T} es la tensión de la cuerda, y finalmente la aceleración viene determinada y representada por $\vec{a} = a_r\hat{u}_r + a_t\hat{u}_t$ con a_r y a_t siendo las componentes de la aceleración en este sistema propuesto. Indispensable mencionar que, son aceleraciones radiales y tangenciales, respectivamente.

Ya que el movimiento realizado por un péndulo es un movimiento circular, es importante hacer mención a las ecuaciones relacionadas con las velocidades y aceleraciones angulares, puesto que el ángulo también desempeña un papel fundamental en el movimiento estudiado.

$$a_r = \omega^2 r$$

$$a_t = r\alpha$$

Donde ω representa la velocidad angular y α la aceleración angular. Ahora haciendo uso de estas ecuaciones anteriores en las leyes de Newton, obtenemos un nuevo par de ecuaciones, para las cuales poder lograr hacer uso fraccionaremos el total del tiempo en pequeños intervalos de tiempo, para así poder lograr que la aceleración α sea casi constante.

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta_f = \omega_0 \theta + \omega t + \alpha \frac{t^2}{2}$$

A partir de las anteriores ecuaciones, podremos calcular la aceleración angular en determinado intervalo de tiempo, así tambien como la velocidad angular al final del intervalo.

3. Metodología

En este apartado del reporte experimental, hablaremos acerca del montaje experimental y planteamiento experimental para cada uno de los casos supuestos, los cuales son amplitudes pequeñas y amplitudes grandes, es importante mencionar, que en nuestra caso una amplitud pequeña equivale a una menor a 1 radián, y por consiguiente una amplitud grande es considerada para aquellas mayores 1 radián.

3.1. Amplitudes pequeñas

Para este caso se hará necesario de dos masas, en nuestro caso la Masa 1, equivalente a 0.6 Kg y la Masa 2, equivalente a 1 Kg, a cada uno de estos cuerpos se atara cuerdas de diferentes longitudes, en nuestro experimento para las dos masas las longitudes elegidas fueron, 0.3m, 0.4m, 0.5m, 0.6m, 0.7m, 0.8m, 0.9m y 1m, cada una de estas cuerdas atadas ya sea a la masa 1 o la masa 2, serán cronometradas en cuanto respecta al movimiento oscilatorio que estas realicen, para obtener una mayor precisión en estos datos, el lapso de tiempo a cronometrar transcurrirá desde el reposo hasta el momento en que la partícula realice su 4 oscilación. Importante recalcar que para una mejor aproximación a la realidad y con el ánimo de obtener un margen de error relativamente pequeño, por cada masa y tipo de cuerda, se cronometrará en 5 ocasiones diferentes, para así luego realizar un promedio de estos y obtener un dato con un menor margen de error.

Luego de la toma de datos, haciendo uso de JupyterLab, herramienta tecnológica que nos permitiera realizar algoritmos computacionales, con el ánimo de lograr obtener los resultados a nuestro experimento, exportamos nuestros datos a esta apk y luego de ello, aplicaremos leyes de logaritmos, con lo cual la fórmula (1) se reescribe de la siguiente manera:

$$\ln(T) = \frac{1}{2} \ln(L) - \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) \quad (4)$$

Así luego de aplicado esto, solo nos quedará despejar a g de la ecuación para poder hallar el valor experimental de la gravedad.

3.2. Amplitudes grandes

En cuanto a este caso, lo primero que realizaremos será grabar 3 videos, cada uno de ellos con las mismas condiciones que el anterior, es decir con el mismo ángulo de oscilación, misma masa y por última misma longitud de cuerda, estos videos se exportarán a Tracker, aplicativo que nos permitirá obtener con gran precisión el cambio del ángulo con respecto al tiempo. La decisión de filmar 3 videos es con el ánimo nuevamente de minimizar el margen de error durante nuestro experimento, obtener un promedio de datos de entre los tres videos, que nos aseguren una mayor precisión en nuestros datos.

Luego de esto, lo que se procederá a hacer será una comparación entre los resultados arrojados por la ecuación para ángulos pequeños en contraposición con los resultados arrojados por la ecuación para ángulos o amplitudes grandes.

4. El experimento y los resultados

4.1. Amplitudes pequeñas

A continuación podremos encontrar en la tabla (1) la compilación de las tomas cronometradas para la Masa 1, la cual era de 0.6 Kg y se sostuvo a 10 longitudes diferentes de cuerda, con el fin de medir el tiempo en que se tardaban en completar 4 oscilaciones. Así mismo podemos apreciar la tabla (2), que corresponde a la compilación de datos de la Masa 2, la cual era de 1 Kg.

Longitudes	0.3m	0.4m	0.5m	0.6m	0.7m	0.8m	0.9m	1m
Tiempos	4.41s	5.04s	5.55s	6.15s	6.63s	7.11s	7.58s	8s
Tiempos	4.34s	5.04s	5.61s	6.19s	6.71s	7.16s	7.61s	7.98s
Tiempos	4.4s	4.97s	5.47s	6.24s	6.68s	7.15s	7.63s	8.01s
Tiempos	4.37s	5s	5.59s	6.09s	6.61s	7.11s	7.59s	8s
Tiempos	4.32s	5.02s	5.44s	6.17s	6.7s	7.13s	7.6s	7.95s
Tiempo promedio	4.368s	5.014s	5.532s	6.168s	6.666s	7.132s	7.602s	7.988s

Cuadro 1: Resultados experimentales Masa 1

Longitudes	0.3m	0.4m	0.5m	0.6m	0.7m	0.8m	0.9m	1m
Tiempos	4.36s	5.03s	5.61s	6.17s	6.64s	7.06s	7.58s	7.98s
Tiempos	4.35s	5.02s	5.61s	6.15s	6.64s	7.1s	7.59s	8s
Tiempos	4.36s	5s	5.58s	6.16s	6.63s	7.09s	7.58s	8.03s
Tiempos	4.34s	5.04s	5.6s	6.15s	6.6s	7.08s	7.56s	8.01s
Tiempos	4.32s	5s	5.63s	6.1s	6.61s	7.12s	7.6s	7.99s
Tiempo promedio	4.346s	5.018s	5.606s	6.146s	6.624s	7.09s	7.582s	8.002s

Cuadro 2: Resultados experimentales Masa 2

A partir de estos datos, se obtienen las siguientes graficas que describen el cambio del periodo de oscilación en función de la longitud de la cuerda, para la Masa 1 y para la Masa 2, respectivamente:

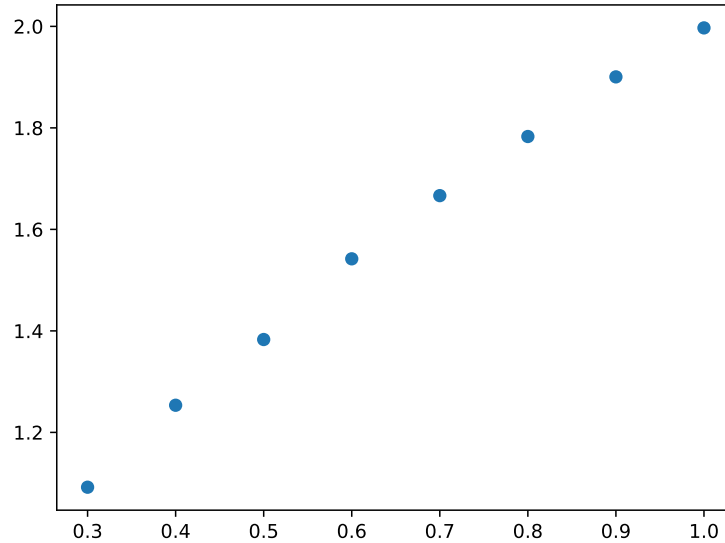
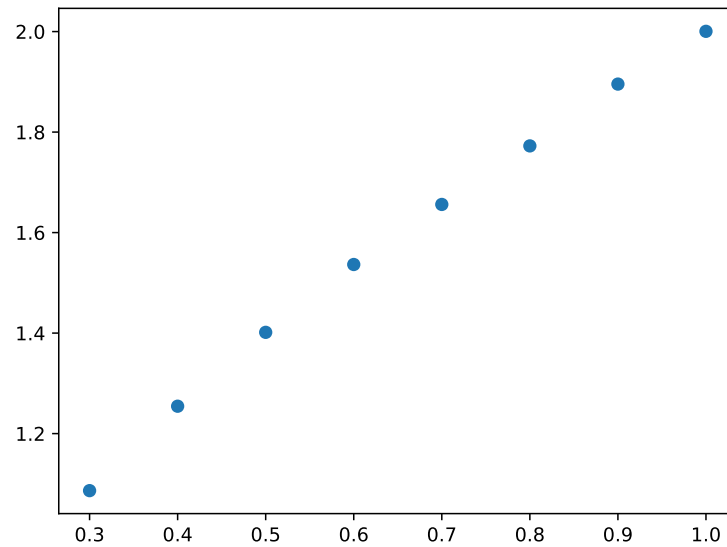
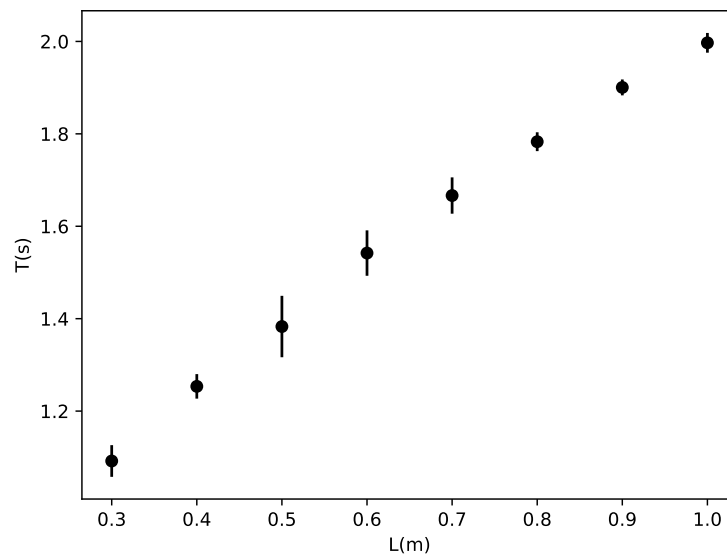


Figura 1: Grafica de $T(s)$ en funcion de $L(m)$, Masa 1

Figura 2: Grafica de $T(s)$ en funcion de $L(m)$, Masa 2

Luego, apartir de los datos arrojados, obtendremos graficamente las barras de error que nos indicaran la desviación estandar en nuestro experimento realizado. Tanto para la Masa 1, como para la Masa 2, se obtuvieron estos margenes de error, que se resumen en las siguientes graficas de margen de error del periodo de oscilación $T(s)$ en función de la longitud de cada cuerda $L(m)$:

Figura 3: Grafica del margen de error $T(s)$ en funcion de $L(m)$, Masa 1

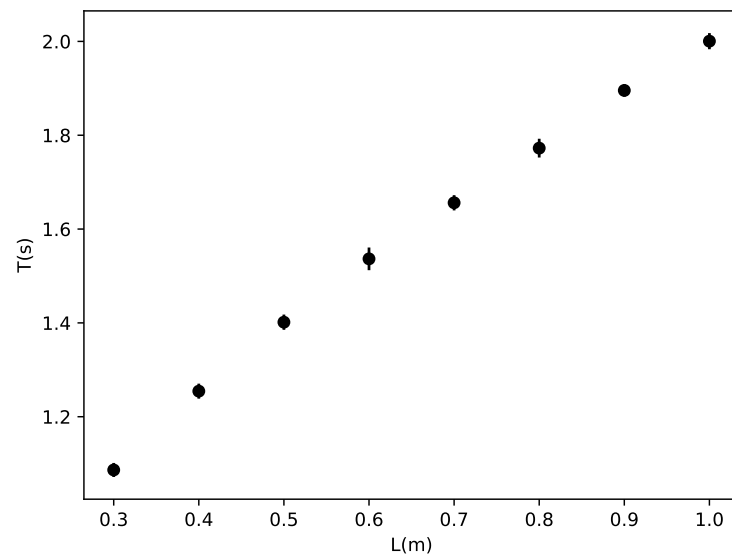


Figura 4: Grafica del margen de error T (s) en función de L (m), Masa 2

Seguidamente de ello, a partir de los datos experimentales ya obtenidos, aplicaremos la función de linealización, para así obtener las siguientes gráficas:

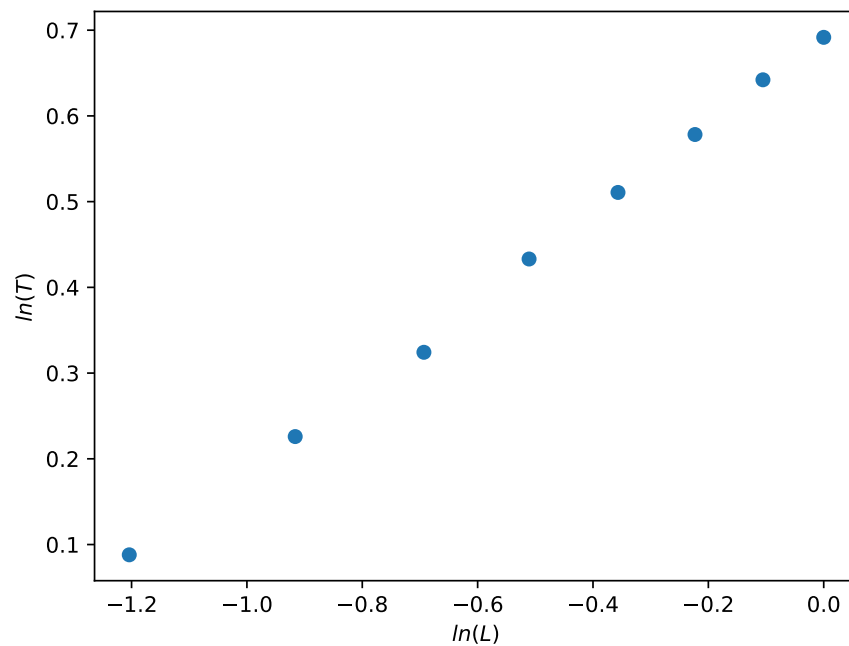


Figura 5: Linealización de T (s) en función de L (m), Masa 1

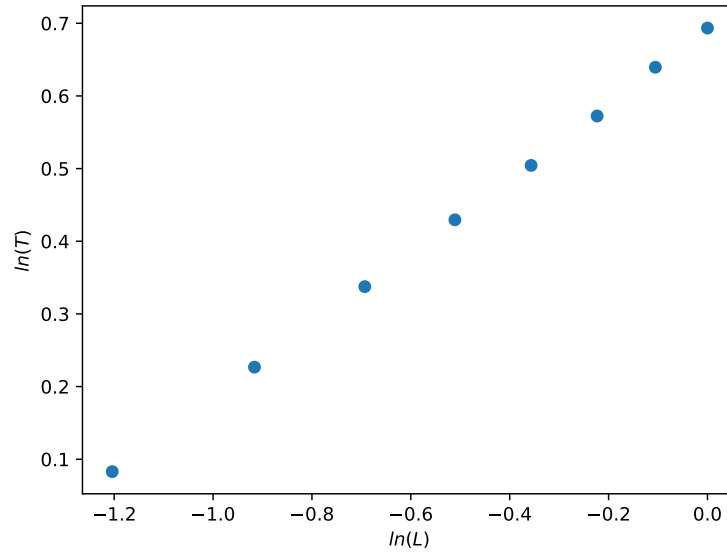


Figura 6: Linealización de $T(s)$ en función de $L(m)$, Masa 2

Tras hacer uso de la función linealización, haremos uso de otra función que nos permitiera obtener indirectamente el valor de la gravedad de manera experimental, esto es, el metodo de minimos cuadrados lineales.

Recordemos la ecuación de (4), apartir de ella podremos despejar, con el objetivo de hallar el valor de la gravedad, para lograrlo seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: Reescribir la ecuación (4) de la forma $\ln(T) = \frac{1}{2}X - A$, en donde X representa $\ln(L)$ y $A, \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right)$

Paso 2: Despejar de la anterior ecuación g, para obtener como ecuación resultante $g = \left(\frac{2\pi}{e^A}\right)^2$

Luego de haber obtenido la ecuación anterior, y de haber aplicado el metodo de minimos cuadrado lineales, el cual nos indico que el valor de A, para la Masa 1 equivale a 0.5071982, mientras que para la Masa 2, equivale a 0.50552819. Usaremos este valor para remplzarlo en la forma y de forma directa hallar el valor de la gravedad para cada una de las masas.

Para la Masa 1, el valor experimental de la gravedad obtenido fue $9,91297 \frac{m}{s^2}$, para la Masa 2, el valor hallado para la gravedad fue $9,9485 \frac{m}{s^2}$

4.2. Amplitudes grandes

Luego de haber filmado los tres videos bajo las mismas condiciones, y haberlos exportado a Tracker, se realiza un promedio de los datos, los cuales se grafican y se obtiene por consiguiente la representación de los datos de la siguiente forma:

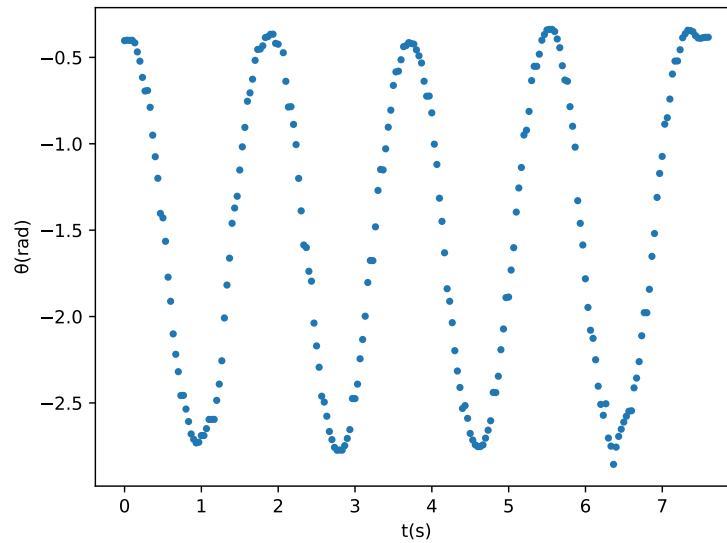


Figura 7: Grafica $\theta(rad)$ en función de $T(s)$

Luego de ello, podemos graficar en una sola figura la comparación existente, entre los distintos resultados hallados, por un lado, referente a amplitudes pequeñas y amplitudes grandes. En ella podemos apreciar como la ecuación para amplitudes grandes, es decir angulos grandes, coincide en gran parte con los resultados experimentales obtenidos. Gran indicador, para afirmar la certeza y precisión de esta ecuación. Por lo cual se podría decir que esta ecuación nos representa un modelado más allegado a la realidad.

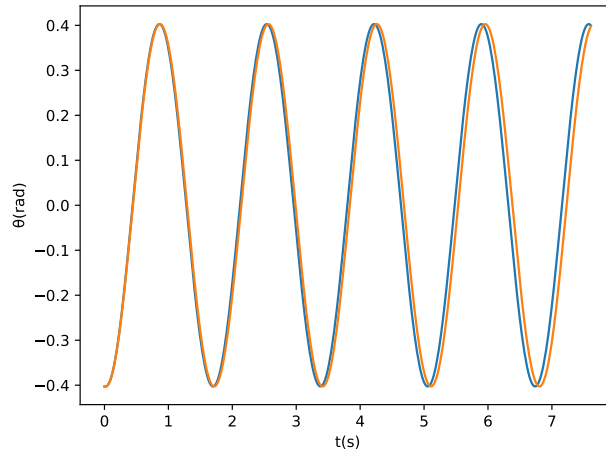


Figura 8: Comparación de los resultados experimentales en contraposición de los teoricos

5. Conclusiones y Recomendaciones

La primera conclusión a la que podemos llegar luego de realizado el experimento, es que, tal como fue notado el tiempo que demora en realizar cierto número de oscilaciones un péndulo, no depende directamente del peso de la masa que se encuentre sostenida, sino que por el contrario la masa no influye, como evidencia de ello, podemos notar que sin importar, la Masa 1 en comparación con la Masa 2 obtuvieron valores muy cercanos en cuanto el valor de la gravedad, la diferencia entre estos es relativamente pequeña.

La segunda inclusión a la que llegamos es que el valor de la gravedad, aunque varia dependiendo de la localización, este cambio es realmente muy pequeño, nuestro experimento realizado en Charalá, Santander arrojo un valor de la gravedad entre $9,91 \frac{m}{s^2}$ y $9,94 \frac{m}{s^2}$, en comparación con el valor teorico de la gravedad que se tiene para la ciudad de Bucaramanga es $9,7782 \frac{m}{s^2}$, así el cambio que se tiene ronda entre $0,14 \frac{m}{s^2}$ y $0,17 \frac{m}{s^2}$ una diferencia pequeña realmente.

Para mejorar la precisión del experimento, se sugiere utilizar técnicas más avanzadas de medición, como sensores de alta precisión y sistemas de adquisición de datos. Además, aumentar el número de repeticiones y variar las condiciones experimentales también puede contribuir a obtener resultados más confiables. Más repeticiones y una variedad de condiciones experimentales también pueden ayudar a producir resultados más confiables.

6. Material complementario

<http://localhost:8888/lab/tree/pendulo2.ipynb>

<http://localhost:8888/lab/tree/pendulo1.ipynb>

7. Referencias

the, O. (2019). ModeloReporte - Overleaf, Online LaTeX Editor. Overleaf.com.
<https://www.overleaf.com/project/5e3802e6d4449b000172025d>