

# Determinación de la aceleración de la gravedad utilizando un péndulo

Andrés Hernández Acosta-2191077 y Hector Peñaranda Pita-2202200

July 2023

## 1 Resumen

En el presente documento se realizará un análisis sobre el comportamiento de un péndulo, ya que, el objetivo principal es poder estimar la aceleración de la gravedad. Para esto es necesario poder dictaminar bajo que características depende el periodo del péndulo, tanto de forma empírica como con un análisis matemático. Para la obtención de los datos se empleará el software "tracker", el cual es eficiente y nos permite tomar las medidas sobre las distancias recorridas con sus respectivos intervalos de tiempo con un grado aceptable de exactitud.

## 2 Introducción

En este proyecto, nos centraremos en determinar el valor aproximado de la aceleración de la gravedad mediante el estudio del periodo de un péndulo. Para ello, construiremos un péndulo casero utilizando dos botellas de agua de diferentes masas y una cuerda de longitud considerable. Nuestro objetivo es analizar cómo factores como la longitud del péndulo y la masa de las botellas influyen en su periodo. Una vez montado el péndulo, provocaremos una pequeña perturbación en la posición inicial y dejaremos que la botella oscile libremente. Utilizaremos el software Tracker para registrar el tiempo de oscilación y obtener datos precisos. Estos datos serán procesados posteriormente utilizando herramientas como Python o JupyterLab para realizar los cálculos necesarios y estimar la aceleración de la gravedad.

Es importante tener en cuenta que los datos obtenidos pueden tener un margen de error debido al software utilizado y a posibles errores humanos en la medición. Sin embargo, esperamos obtener un valor estimado de la aceleración de la gravedad cercano a  $9.8 \text{ m/s}^2$ . A través de este experimento, buscamos comprender mejor la relación entre el periodo de un péndulo y la aceleración de la gravedad, así como el impacto de variables como la longitud y la masa en dicho periodo. Esta experiencia nos permite aplicar nuestros conocimientos teóricos en un entorno práctico y fortalecer nuestras habilidades en la recolección y análisis de datos.

### 3 Objetivos

- Realizar los montajes correspondientes sobre los pendulos con distintas masas.
- Comparar los datos obtenidos tanto por un ámbito teórico como por el experimental.
- Calcular el valor de la gravedad partiendo del conocimiento previo del modelo teórico del péndulo.

### 4 Marco teórico

La teoría de los péndulos es un tema fundamental en la física y se basa en los principios de la mecánica clásica. En este experimento, nos centraremos en el estudio de los péndulos simples, que son aquellos en los que se considera una masa puntual suspendida de un hilo inextensible y sin masa. A continuación, presentaremos los conceptos teóricos clave relacionados con este experimento.

#### 4.1 Péndulo Simple

Según [1] Un péndulo simple es un sistema mecánico compuesto por una masa  $m$  suspendida de un hilo de longitud  $L$  y sin resistencia al aire. El movimiento del péndulo se debe a la fuerza gravitacional y está descrito por la siguiente ecuación diferencial:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde  $T$  representa el periodo del péndulo,  $g$  es la aceleración debida a la gravedad y  $L$  es la longitud del hilo. La ecuación anterior se puede linealizar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \ln(T) &= \ln(\sqrt{L}) - \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) \\ \ln(T) &= \frac{1}{2}\ln(L) - \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) \end{aligned}$$

Esta ecuación se puede escribir también como:

$$Y = \frac{1}{2}X + \beta \tag{1}$$

donde  $\beta = \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right)$

## 4.2 Influencia de la Masa en el Periodo

[1] muestra que el periodo de un péndulo simple depende de varios factores, incluida la longitud del hilo y la masa del objeto suspendido. En nuestro experimento, nos enfocaremos en analizar cómo la masa afecta el periodo del péndulo, manteniendo la longitud del hilo constante.

Según la teoría, el periodo de un péndulo simple es independiente de la masa del objeto suspendido. Esto se conoce como el "isocronismo del péndulo" y fue demostrado por Galileo Galilei en el siglo XVII. Esto significa que, para péndulos de igual longitud, el periodo será el mismo, independientemente de la masa.

Sin embargo, es importante tener en cuenta que esta teoría asume ciertas condiciones ideales, como la inexistencia de fricción y la consideración de una masa puntual. En la práctica, factores como la resistencia del aire y la distribución de masa del objeto pueden afectar ligeramente el periodo del péndulo.

## 4.3 Aceleración de la Gravedad

El valor de la aceleración debida a la gravedad, denotado por  $g$ , es una constante fundamental en física. En la superficie de la Tierra, su valor promedio es de aproximadamente  $9.8m/s^2$ . Sin embargo, este valor puede variar ligeramente dependiendo de la ubicación geográfica.

En nuestro experimento, utilizaremos los datos resultantes de los periodos, para poder realizar la linealización anteriormente mencionada y obtener el valor de  $\alpha$  y calcular la debida gravedad. Donde:

$$\begin{aligned}\beta &= \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) \\ e^\beta &= \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \\ \sqrt{g} &= \frac{2\pi}{e^\beta} \\ g &= \left(\frac{2\pi}{e^\beta}\right)^2\end{aligned}\tag{2}$$

## 4.4 Métodos de Medición

Para llevar a cabo este experimento, utilizaremos técnicas de medición precisas. Para medir la longitud del hilo, utilizaremos una regla o una cinta métrica con una escala adecuada. Para medir el periodo del péndulo, registraremos el tiempo transcurrido durante 4 oscilaciones en el programa Tracker. Es importante realizar múltiples mediciones y calcular promedios para reducir el error experimental y obtener resultados más confiables.

## 4.5 Consideraciones Experimentales

Durante la realización del experimento, es importante tener en cuenta algunas consideraciones experimentales. Por ejemplo, se debe asegurar que el péndulo oscile libremente sin rozamiento con el aire ni con otros objetos. Además, se debe minimizar la interferencia de factores externos, como las corrientes de aire, que podrían afectar el movimiento del péndulo.

Asimismo, se debe tener precaución al manipular el péndulo y seguir todas las normas de seguridad para evitar accidentes.

## 4.6 oscilaciones Pequeñas

por otro lado, las oscilaciones pequeñas son aproximaciones lineales del movimiento armónico simple (MAS) para ángulos pequeños. En este caso, se asume que el ángulo del péndulo es pequeño (15 a 0 grados), lo que nos permite linealizar la ecuación de movimiento. La ecuación del movimiento para oscilaciones pequeñas es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

Donde:  $\theta$  es el ángulo del péndulo en radianes, la segunda derivada de  $\theta$  con respecto a  $t$  es la aceleración angular,  $g$  es la aceleración a la gravedad, y  $L$  es la longitud del péndulo.

## 4.7 Oscilaciones generales

Ahora bien, para oscilaciones grandes la anterior aproximación no es suficiente, por lo tanto para oscilaciones generales se tiene la necesidad de usar la siguiente ecuación diferencial para mejorar la exactitud:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

De lo anterior se puede evienciar que en oscilaciones pequeñas el  $\sin(\theta)$  se aproxima a  $\theta$  pero es algo que no sucede cuando el ángulo tratado es mucho más grande.

# 5 Metodología

## 5.1 Montaje del experimento

Para poder llevar a cabo el experimento se requiere contar con ciertos elementos básicos como lo son: botellas de agua, una de 300 ml y otra de 500 ml, una cuerda inextensible y sin masa considerable, computador que cuente con el software tracker y un celular para la grabación en video de los movimientos de cada péndulo. La cuerda y las botellas de agua debe ser de un color distinto al fondo

del video, esto debido a que el software tomará rastros de las "partículas" y necesita poder diferenciarla del resto de los objetos.

Cuando se cuente con escenario preparado para el experimento, se procede a amarrar la cuerda del pico de una de la botellas (ya deben estar llenas de agua) y ubicar la parte suelta en un lugar alto, esto con el fin de simular un péndulo, luego de esto, se procede a separar un poco la botella del punto de inicio con el objetivo de poder crear un pequeño movimiento "angular" en el tope de la cuerda, recordemos que este debe ser de un angulo considerablemente pequeño.

Se tomará un video por el movimiento y este se subirá al software tracker el cual nos ayudará a registrar diez datos, este proceso se repite diez veces con la misma botella. El experimento terminará un vez se hayan realizado todos los montajes para cada botella con una respectiva longitud de la cuerda.

## 5.2 Experimento para volúmenes de 300 mL y 500 mL

En esta sección se elaborará la toma de datos del experimento teniendo en cuenta que para cada volumen se realizará la toma de 4 ciclos para longitudes de:

(L)	(Volumen)
0.1 m	500 y 300 mL
0.14 m	500 y 300 mL
0.18 m	500 y 300 mL
0.22 m	500 y 300 mL
0.26 m	500 y 300 mL
0.30 m	500 y 300 mL

Table 1: Posición vs tiempo en servilleta extendida

## 5.3 Muestras montaje experimental péndulo

El experimento como se esperaba trasaría una grafica ciclica en tracker como se observa en 1

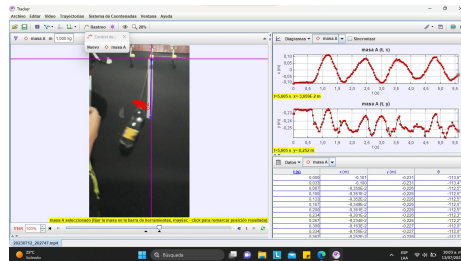


Figure 1: Toma de datos

Además, también se logró observar los siguientes datos pertenecientes al promedio del periodo de ambos péndulos según su longitud:

(L)	300 ml	500ml
0.1 m	0.63	0.65
0.14 m	0.74	0.77
0.18 m	0.84	0.85
0.22 m	0.94	0.98
0.26 m	1.02	1
0.30 m	1.09	1.12

Table 2: PDatos promedios de periodos

## 5.4 Modelado computacional

Para calcular la gravedad en cada uno de nuestros péndulos, utilizamos la ecuación (1) . El proceso consistió en seguir los siguientes pasos:

- Montar los datos experimentales del tiempo en que se repiten 4 ciclos del pendulo una vez se suelta según su longitud,
- Sacamos los promedios para cada longitud, obteniendo los periodos.
- Graficamos los anteriores resultados, con su barra de error.
- Linealizamos los datos haciendo uso de logaritmo natural.
- Obtenemos por medio de polyfit de primer grado, la mejor aproximación a los datos anteriores.
- Gracias a polyfit el dato resultante al segundo arreglo es el  $\beta$  que buscábamos en la ecuación 2.
- Reemplazamos los datos y obtenemos la gravedad para la masa específica.
- Una vez obtenida la gravedad se construyen dos funciones para analizar las ecuaciones diferenciales vistas anteriormente y observar cual grafico se adapta mejor a los resultados.

Este proceso nos permitió obtener la gravedad correspondiente a cada uno de los péndulos analizados. Cada valor de gravedad calculado representa una estimación de la aceleración debida a la gravedad para ese péndulo en particular. Al tener una lista de gravedades, podemos analizar y comparar los resultados obtenidos, lo que nos proporciona una mejor comprensión de cómo diferentes factores, como la longitud de la cuerda y el periodo del péndulo, afectan la gravedad medida.

## 6 Resultados

### 6.1 Periodo volumen de 300 mL y 500 mL

Al analizar los datos obtenidos durante el experimento del péndulo, se observa una clara relación entre el periodo de oscilación y la longitud de la cuerda.

Según los resultados, a medida que la longitud de la cuerda aumenta, el periodo también incrementa de manera proporcional. Esta relación proporcional entre el periodo y la longitud de la cuerda es consistente con la teoría del péndulo simple, que establece que el periodo de oscilación de un péndulo está directamente relacionado con su longitud. En nuestro experimento, pudimos confirmar esta relación y demostrar su validez.

Además, es importante destacar que los datos obtenidos muestran una tendencia lineal, lo que sugiere que la relación entre el periodo y la longitud de la cuerda es lineal en nuestro rango de valores. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que esta relación puede variar en situaciones o condiciones diferentes. Estos hallazgos nos permiten comprender mejor el comportamiento de los péndulos y cómo la longitud de la cuerda afecta su periodo de oscilación. También resaltan la importancia de considerar la longitud de la cuerda al diseñar y construir péndulos, ya que tiene un impacto directo en su funcionamiento y comportamiento.

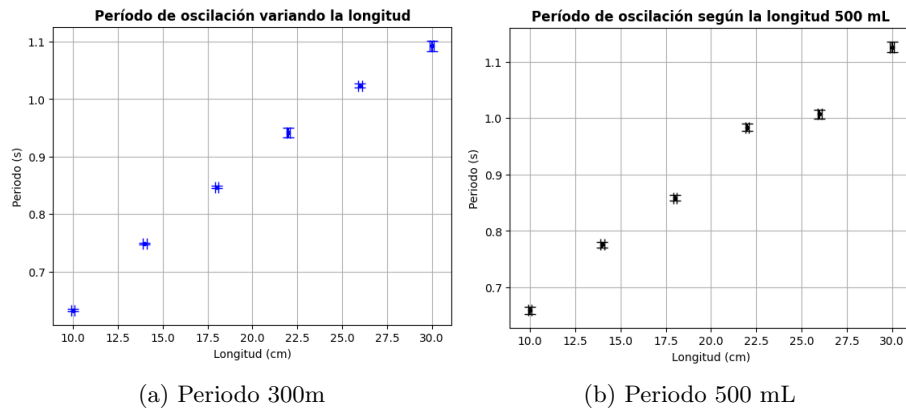


Figure 2: Periodos según distintas longitudesL

Finalmente, como se observa en la figura 2 se logró evidenciar que el periodo ejercido por ambos pendulos mantiene un comportamiento similar lo cual nos proporciona herramientas para establecer que sin importar la masa estos se mantiene relativamente iguales en las distintas longitudes.

## 6.2 Linealización botella

Una vez obtenidos los periodos promedios para ambos pendulos, se procederá a linealizar la función por medio del logaritmo natural, debido a la necesidad de implementar el modelo computacional que se tiene para obtener el valor de  $\beta$  en la ecuación 1, obteniendo así la figura 3:

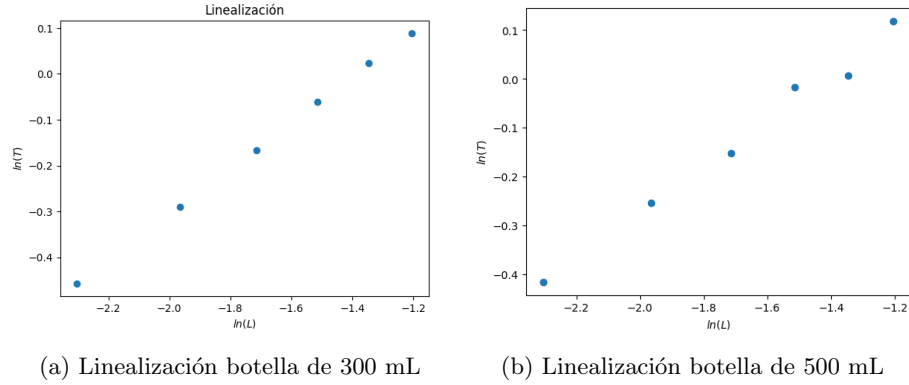


Figure 3: Linealización con logaritmos

## 6.3 Gravedad

Al analizar los datos obtenidos durante el experimento del péndulo, Al realizar los respectivos calculos ofrecidos en el modelo computacional para hallar la gravedad según distintas longitudes que se optienen de los datos de la figura (2), Se logró concluir qué:

La gravedad obtenida para la botella de 300 ml fue de:  $9.86m/s^2$  mientras la gravedad o observada en la botella de 500 mL fue de:  $10.2m/s^2$  por lo cual si tomamos el promedio total de ambas da como resultado una gravedad de  $9.62m/s^2$

## 6.4 Error relativo y absoluto de la gravedad

El error absoluto hallado en este experimento se puede expresar como:

$$Error_{Absoluto} = |V_{teorico} - V_{experimental}|$$

$$Error_{Absoluto} = |9.8 \frac{m}{s^2} - 10.03 \frac{m}{s^2}|$$

$$Error_{Absoluto} = 0.23 \frac{m}{s^2}$$



Mientras tanto el error relativo seria dado por:

$$Error_{relativo} = \frac{|V_{teorico} - V_{experimental}|}{V_{teorico}}$$

$$Error_{relativo} = \frac{0.23 \frac{m}{s^2}}{9.8 \frac{m}{s^2}}$$

$$Error_{relativo} = 0.0235$$

## 6.5 Comparación modelo oscilaciones grandes vs pequeñas

En la figura 4, se puede observar una comparación entre el modelo computarizado que fue generado al momento de tomar en cuenta los valores de la gravedad anteriormente obtenidos,  $10.03 \frac{m}{s^2}$  con una longitud de cuerda de 0.3 m. Una vez concretados los parámetros, se ajustará el tiempo utilizado por el pendulo en el montaje experimental tanto para oscilaciones pequeñas, como para oscilaciones grandes.

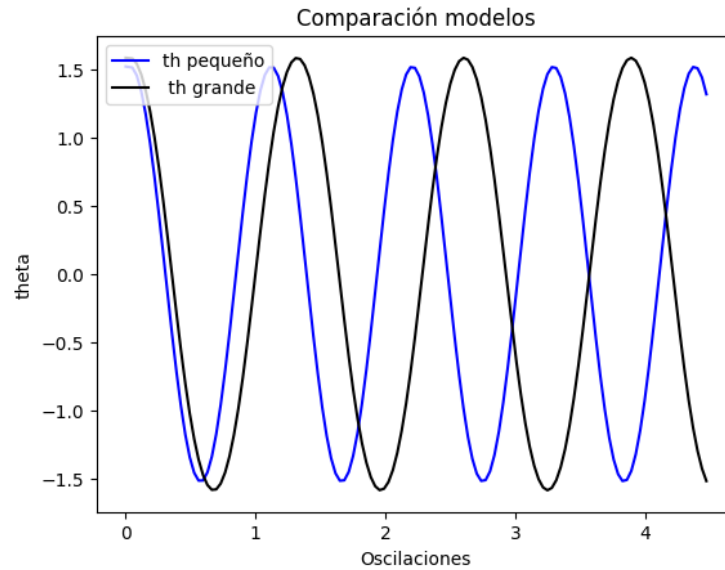


Figure 4: Oscilaciones grandes vs pequeñas

De la anterior imagen se logra observar como el periodo incrementa mientras se hace mayor el ángulo desde el cual se libera la botella y es así como se ajusta mucho mejor a los datos observados anteriormente.

## 7 Conclusiones

- El valor promedio de la aceleración de la gravedad obtenido en este experimento fue de  $10.03 \frac{m}{s^2}$ . Este valor está ligeramente por debajo del valor

aceptado de  $9.8 \text{ m/s}^2$  pues muestra un error relativo de un 0.235 por ciento únicamente. Es importante tener en cuenta que existen diversos factores que pueden contribuir a esta discrepancia, como errores experimentales y limitaciones en la precisión de los instrumentos de medición utilizados.

- A pesar de la diferencia en el valor promedio de la aceleración de la gravedad, se observa una relación consistente entre la longitud del hilo y el periodo del péndulo. Esta relación se ajusta a la ecuación teórica y demuestra que, en nuestro experimento, la longitud del hilo afecta el periodo del péndulo de manera predecible.
- El periodo de oscilación del péndulo está influenciado principalmente por la longitud de la cuerda. Se observó una clara relación proporcional, donde a mayor longitud de la cuerda, mayor fue el periodo de oscilación.
- La relación entre la longitud de la cuerda y el periodo de oscilación sigue una tendencia lineal cuando el ángulo de oscilación es pequeño, cumpliendo así con la ley del péndulo simple.
- Al comparar los modelos experimentales observados, se puede observar como el modelo construido para ángulos superiores a 15 grados se adapta de mejor manera como se esperaba.
- La masa del péndulo no tuvo un efecto significativo en el periodo de oscilación. Aunque se utilizaron péndulos con diferentes masas, se encontró que el periodo se mantuvo constante para cada longitud de cuerda.
- El experimento nos permitió comprender la importancia de utilizar técnicas de medición precisas y realizar múltiples mediciones para obtener resultados más confiables. Además, nos brindó la oportunidad de aplicar conceptos teóricos aprendidos en clase y verificar su validez en un entorno experimental.
- Se identificaron posibles fuentes de error en el experimento, como la resistencia del aire y la precisión limitada de los instrumentos de medición. Estas fuentes de error pueden haber contribuido a la discrepancia en el valor promedio de la aceleración de la gravedad.

## References

- [1] Víctor Alonso et al. Péndulo simple. 2018.