

# Estimación de la aceleración de gravedad mediante la oscilación de un péndulo

Juan Sebastian Urrea Vega  
Carlos Mario Alvarez Lizcano  
*Escuela de Física*  
*Universidad Industrial de Santander*

24 de Abril de 2023

## Índice

<b>1. Resumen</b>	<b>1</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>3. Marco Teórico</b>	<b>2</b>
<b>4. Metodología</b>	<b>3</b>
4.1. Gráficas . . . . .	4
<b>5. El experimento y los resultados</b>	<b>6</b>
<b>6. Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>7</b>
<b>7. Referencias</b>	<b>7</b>

## 1. Resumen

El presente experimento se enfoca en la determinación de la aceleración de la gravedad mediante el estudio de la oscilación de un péndulo. Se llevaron a cabo experimentos utilizando diferentes longitudes y masas del péndulo para evaluar su influencia en el período de oscilación. Mediante mediciones precisas del período y aplicando la fórmula del péndulo simple, se calcularon las aceleraciones de la gravedad correspondientes a cada configuración.

## 2. Introducción

La gravedad, una de las fuerzas fundamentales de la naturaleza, ha sido objeto de estudio e intriga para científicos durante siglos. Su capacidad para atraer masas hacia el centro de la Tierra ha sido ampliamente reconocida, pero su valor numérico, conocido como la aceleración de la gravedad ( $g$ ), varía ligeramente en diferentes lugares del planeta. En este contexto, el presente informe se enfoca en la determinación de la aceleración de la gravedad en la ciudad de Bucaramanga, Colombia, utilizando herramientas computacionales para el modelado del movimiento de un péndulo.

El objetivo principal de este estudio es calcular la aceleración de la gravedad en Bucaramanga mediante la observación y análisis de la oscilación de un péndulo. Para lograrlo, se realizarán una serie de experimentos con péndulos de diferentes longitudes y masas para evaluar cómo estas variables afectan el período de oscilación. Luego, se utilizarán herramientas computacionales para modelar el movimiento del péndulo y obtener una estimación precisa de la aceleración de la gravedad en la ciudad.

El uso de herramientas computacionales en este estudio permitirá un análisis más riguroso y detallado del comportamiento del péndulo, además de proporcionar resultados más precisos en el cálculo de la aceleración de la gravedad. Estas herramientas ofrecen la ventaja de simular diversas condiciones y ajustar parámetros con mayor facilidad, lo que contribuye significativamente a la comprensión de la física subyacente y puede abrir nuevas perspectivas en el estudio de la gravedad y su variación geográfica. Con todo esto en mente, nos adentramos en la experimentación y análisis para desentrañar el misterio detrás de la aceleración de la gravedad en la ciudad de Bucaramanga.

## 3. Marco Teórico

Este experimento está fundamentado en 2 pilares de conocimiento principales, el primero consiste en las ecuaciones de Newton que describen el movimiento de un péndulo de masa  $m$  atado a una cuerda *flexible, inextensible y sin masa* de longitud  $L$ , las cuales son:

$$m \vec{a} = \vec{T} + m \vec{g} \Rightarrow \begin{cases} ma_r = -T + mg \cos \theta \\ ma_t = -mg \sin \theta. \end{cases} \quad (1)$$

El segundo pilar es el Movimiento armónico simple [MAS][4], un tipo de movimiento oscilatorio que se presenta cuando hay una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento y desde la posición de equilibrio en sentido contrario, el [MAS] tiene 3 Leyes principales, para este experimento vamos a tener en cuenta la primera ya enunciada y la tercera, que nos dice para un péndulo que su periodo es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (2)$$

De esta fórmula y del concepto de la fuerza restauradora podemos deducir una formula más formal y correcta para nuestro caso, en el cual queremos discriminar de distintas amplitudes angulares, la cual es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\frac{g}{L} \text{sen}(\theta) \quad (3)$$

Esta fórmula nos permite calcular la aceleración angular de nuestro péndulo con diversas amplitudes, ahora bien, para ángulos pequeños  $\text{sen}(\theta) \approx \theta$  de modo que nuestra ecuación se convierte en algo más manejable, así:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\frac{g}{L} \theta \quad (4)$$

Bajo estas dos ecuaciones (3)(4) tenemos lista la teoría para modelar nuestras situaciones en tracker [2] utilizando subintervalos para cada ángulo donde la aceleración angular es constante, y así poder discriminar los  $\theta$  de cada uno de ellos.

$$[t_i, t_{i+1}] : \left. \begin{array}{l} \omega(t_i) = \omega_i \\ \theta(t_i) = \theta_i \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_{i+1} = \omega_i + \alpha_i [t_{i+1} - t_i] \\ \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i [t_{i+1} - t_i] + \alpha_i \frac{[t_{i+1} - t_i]^2}{2}; \end{array}$$

donde hemos representado  $\alpha_i \equiv \alpha(\theta_i, \omega_i, t_i)$ .

Ahora podemos calcular la aceleración angular en ese intervalo y luego el valor de la tensión:

$$\alpha_i = \frac{g \text{sen } \theta_i}{r} \Rightarrow T_i = -m\omega_i^2 r + mg \cos \theta_i. \quad (5)$$

Si la amplitud es pequeña, entonces podemos aproximar  $\text{sen } \theta_i \approx \theta_i$  y las ecuaciones se simplifican como

$$\alpha_i = \frac{g \theta_i}{r} \Rightarrow T_i = -m\omega_i^2 r + mg \cos \theta_i. \quad (6)$$

Seguidamente determinamos la velocidad angular al final del intervalo y el correspondiente desplazamiento angular

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \alpha_i [t_{i+1} - t_i] \quad \text{y} \quad \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i [t_{i+1} - t_i] + \alpha_i \frac{[t_{i+1} - t_i]^2}{2}. \quad (7)$$

De este modo ya tenemos un modelo teórico para nuestras oscilaciones en subintervalos medibles con Tracker [2], el cual nos dará a través de las fórmulas (3) y (4), despejando  $g$  de estas formulas, lo cual nos daría:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \quad (8)$$

## 4. Metodología

Para desarrollar este experimento el primer paso fue realizar un modelo teórico de la situación del péndulo simple, a través de las ecuaciones presentadas y de un modelado en Python [3] de los cuatro casos estudiados, de esta manera se obtuvieron las curvas de variación teóricas a las cuales debíamos ajustar el modelo experimental.

Las cuatro situaciones contemplan variaciones en la apertura angular, tanto para pequeños ángulos como para grandes, esto con el fin de observar la situación donde  $\sin(\theta) \approx \theta$  a estas situaciones las estudiamos tanto con masa de  $600ml \approx 0,6kg$  como de  $300ml \approx 0,3kg$  para poder comprobar que el periodo y la aceleración angular (en este caso  $g$ ) no tienen relación con la masa sino con la longitud de nuestro péndulo, en este caso fija en  $1m$

Todas las situaciones se grabaron para ser procesadas en el software Tracker y de esta manera poder tener una medida de los angulos y su variación con el tiempo precisa, gracias a estos datos proporcionados y a los modelos en Python, se hizo la comparación teorico-experimental para determinar nuestro  $g$  experimental.

#### 4.1. Gráficas

A continuación veremos la comparación gráfica de los modelos teoricos y los modelos experimentales medidos con Tracker de los cuatro casos presentados anteriormente.

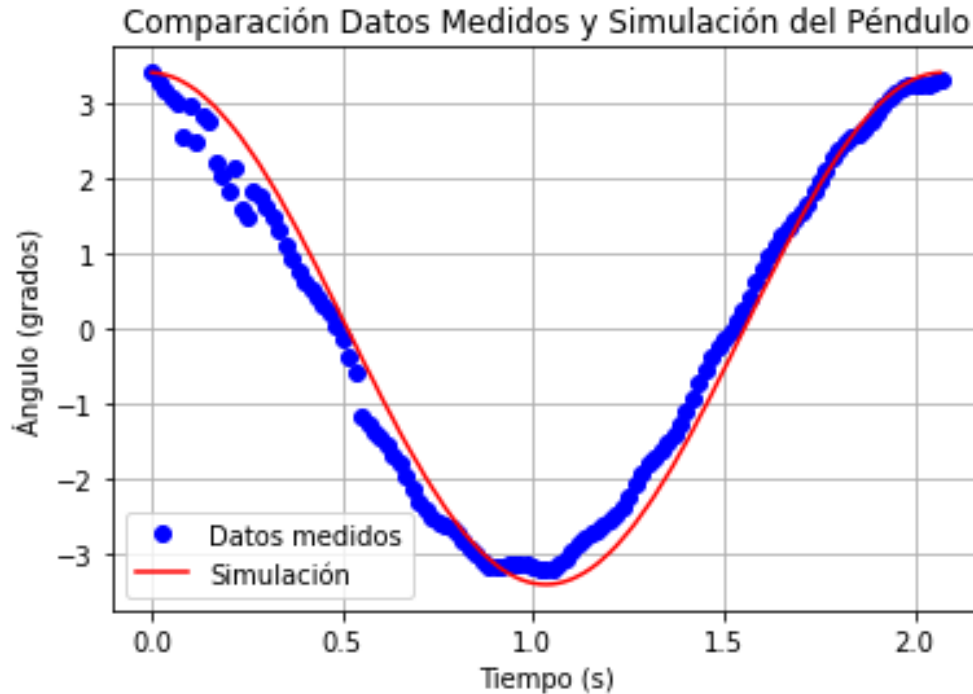


Figura 1: Comparación de los datos teóricos y experimentales en 300ml y ángulos pequeños

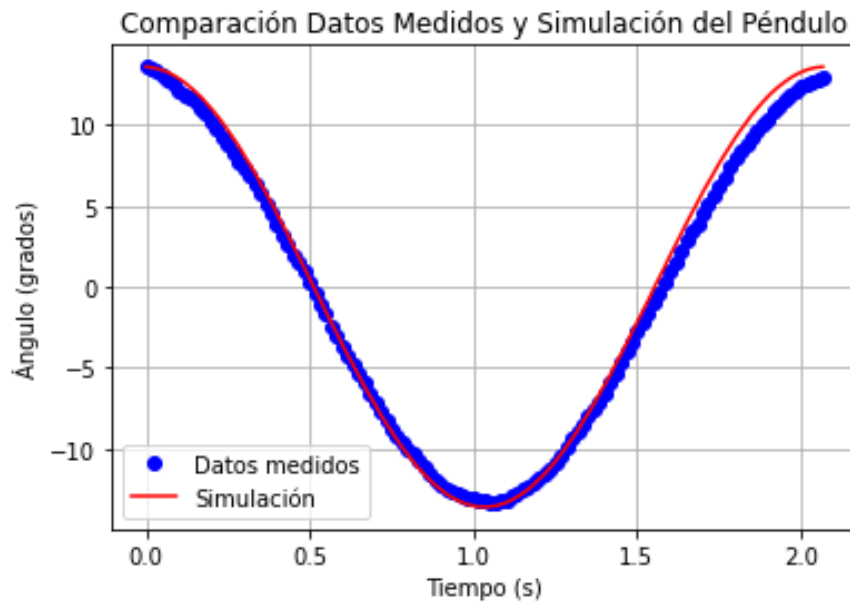


Figura 2: Comparación de los datos teóricos y experimentales en 300ml y ángulos grandes

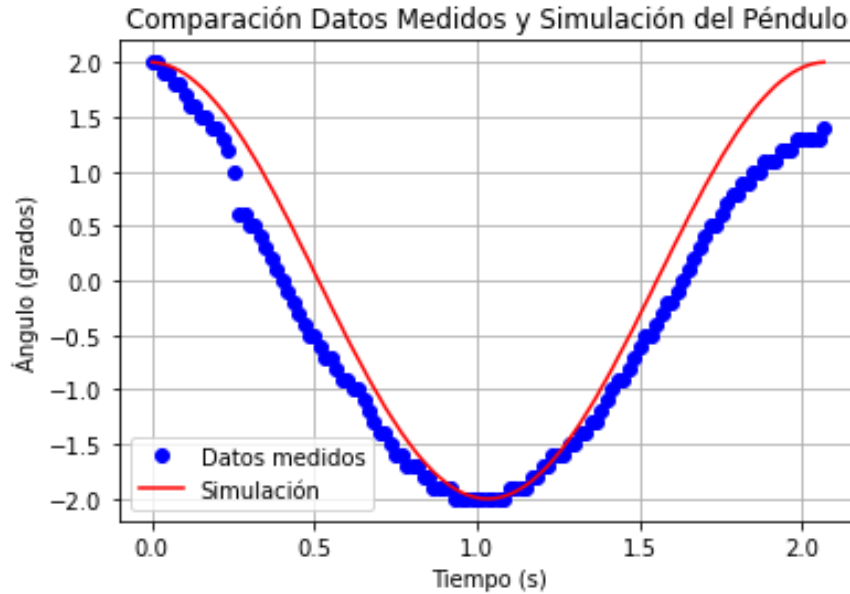


Figura 3: Comparación de los datos teóricos y experimentales en 600ml y ángulos pequeños

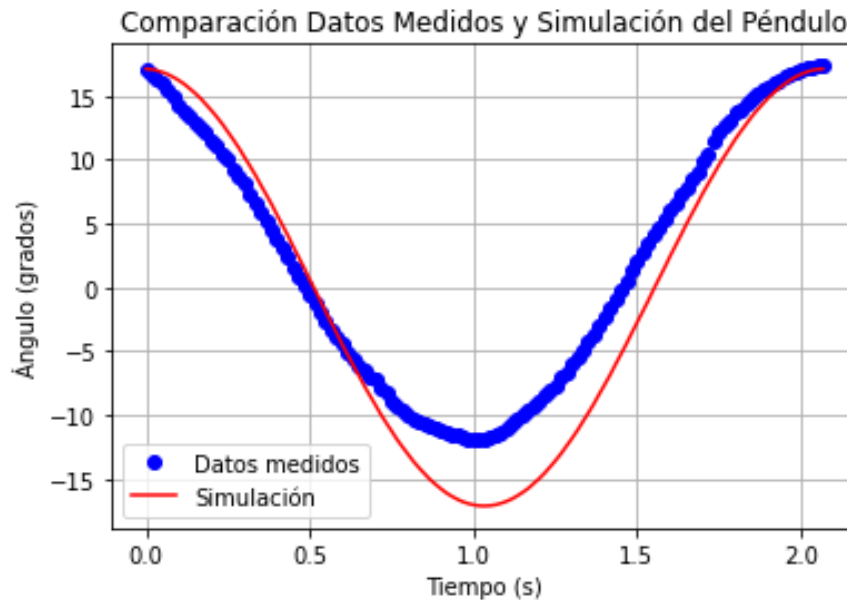


Figura 4: Comparación de los datos teóricos y experimentales en 600ml y ángulos grandes

## 5. El experimento y los resultados

El objetivo del experimento es encontrar la aceleración de gravedad mediante la oscilación de un péndulo simple y encontrar los factores que afectan a su aceleración angular, cuando se puede aproximar y cuando no, debido a esto se estudiaron cuatro situaciones diferentes, la primera con una masa de 600ml  $\approx 0,6\text{kg}$  y 1metro de longitud del péndulo, este se dejó oscilar primero en ángulos menores de 4 grados para poder apreciar la aceleración de la gravedad en el montaje, posteriormente se dejó oscilar con ángulos más grandes y variados entre 30-10 aproximadamente, esto se repitió para el otro escenario de masa con 300ml  $\approx 0,3\text{kg}$  y 1metro en el que se pudo observar exactamente lo mismo ya que, aunque sabíamos por la teoría que la masa no afectaba el periodo de un péndulo, nos pareció importante comprobar este hecho de forma experimental, el montaje se hizo intentando mantener el centro de masa de la botella para que esta girara sobre su propio eje lo menos posible para así evitar movimientos circulares aparte del movimiento oscilatorio y que tanto la fricción con el aire como la "desaceleración" de la cuerda enrollada fuera lo menor posible, así mismo se mantuvo la misma botella para evitar variar la masa más de lo esperado, todo con el fin de evitar tener tantos errores experimentales por parte humana. Ahora bien, a pesar de esto siempre se van a presentar errores experimentales tanto como por las condiciones como por errores de medición, un error humano muy común que presentamos fue la inclinación de los videos, al momento de grabar no usamos un trípode o un soporte fijo, lo que hizo que en varios videos hubiera un cambio de ángulo y perspectiva en la cámara, lo que hizo que fuera más difícil el tener una rigurosidad exacta con las mediciones en Tracker, lo que explica un error que presentamos, como se puede apreciar en las gráficas, los ángulos grandes tienden a tener una mayor precisión o ajuste con el modelo

teórico, esto es debido a que con ángulos más pequeños la calidad del video disminuye y estos movimientos de cámara se hacen más notorios y afectan en mayor medida a los ángulos menores de  $4^\circ$ , lo cual nos afectó aunque menos de lo esperado al resultado obtenido, ya que la gravedad hallada fue de  $g = 9,86m/s^2$  valor el cual no dista demasiado de la gravedad en Bucaramanga la cual es de  $g = 9,78m/s^2$  dando un error aproximado del 0,08 este método resultó ser más preciso que cuando se midió en el pasado con la servilleta, así mismo pudimos comprobar que la masa no afecta el periodo, también se pudo comprobar el hecho de que para amplitudes pequeñas  $\sin(\theta) \approx \theta$  siendo bastante satisfactorias los resultados ya que se apegan bastante a los modelos teóricos planteados.

## 6. Conclusiones y recomendaciones

En este experimento se llevó a cabo una estimación satisfactoria de la aceleración de la gravedad en la ciudad de Bucaramanga, resultando esta aproximadamente  $9,86m/s^2$  con un error del 0,86 lo cual es bastante bajo considerando los errores antes mencionados, la primera conclusión que podemos mencionar es el hecho de que la masa no afecta el periodo y por lo tanto la aceleración angular de un péndulo simple, también podemos concluir que este método es más eficiente para medir la gravedad que los anteriormente usados, si bien es cierto se evidencian errores humanos en las tablas y gráficas debido a la inexactitud de las herramientas y los métodos elegidos, consideramos que la conclusión es muy satisfactoria ya que se logró cumplir con todos los objetivos planteados a resolver en este experimento. Por último varias recomendaciones que daríamos al momento de

replicar el experimento es tener cuidado con el centro de masa de la botella y dónde se decide .atar.<sup>a</sup> la cuerda para crear este péndulo, ya que en un principio nos afectó mucho este hecho y decidimos cambiar el lugar de anclaje, también el usar un soporte fijo para la grabación de las medidas ya que esto fue una complicación enorme usando los software's de procesamiento de movimiento como lo es Tracker, esto reduciría los errores humanos en una gran cantidad.

## 7. Referencias

### Referencias

- [1] OpenStaxTeam. Física universitaria vol.1, el péndulo simple. <https://openstax.org/books/f%C3%ADsica-universitaria-volumen-1/pages/15-4-pendulos#:~:text=T%20%3D%20%20%CF%80%20I%20m%20g%20L%20.&text=Observe%20que%20para%20un%20p%C3%A9ndulo,T%20%3D%20%20%CF%80%20L%20g%20.>
- [2] physlets.org. Tracker video analysis and modeling tool for physics education. <https://physlets.org/tracker/>.
- [3] python.org. Welcome to python. <https://www.python.org/>.

- [4] Gobierno Vasco. Movimiento armónico simple. <https://www.amarauna.euskadi.eus/es/recurso/el-pendulo-movimientos-armonicos-compuestos/9123c058-d120-44b5-9aeb-04cf8d9a2a9c>.

[4] [1] [2] [3]