



Demostraciones de Levi-Civita, producto escalar y producto vectorial

Carlos Mario Álvarez Lizcano - Física

Facultad de Ciencias, Escuela de Física
Universidad Industrial de Santander

1. Demostración de $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$

Para retomar un poco, sabemos que:

$$\epsilon_{ijk} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}\epsilon_{lmn}$$

Y que si empezamos a asignar valores a los índices, tendríamos algo como lo siguiente:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk} &= \delta_{i1}\delta_{jm}\delta_{kn}\epsilon_{1mn} + \delta_{i2}\delta_{jm}\delta_{kn}\epsilon_{2mn} + \delta_{i3}\delta_{jm}\delta_{kn}\epsilon_{3mn} \\ &= \delta_{i1}\delta_{j1}\delta_{kn}\epsilon_{11n} + \delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{kn}\epsilon_{12n} + \delta_{i1}\delta_{j3}\delta_{kn}\epsilon_{13n} \\ &= \delta_{i1}\delta_{jm}\delta_{k1}\epsilon_{lm1} + \delta_{i1}\delta_{jm}\delta_{k2}\epsilon_{lm2} + \delta_{i1}\delta_{jm}\delta_{k3}\epsilon_{lm3}\end{aligned}$$

Y por la definición de Levi-Civita, sabemos que:

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{lmn} = \begin{cases} 1 & \text{si el número de permutaciones es par} \\ -1 & \text{si el número de permutaciones es impar} \\ 0 & \text{si hay dos o más índices repetidos} \end{cases} \quad (1)$$

Por lo que combinaciones como ϵ_{111} , ϵ_{121} , ϵ_{221} , ϵ_{331} ... en fin, con dos índices repetidos no nos sirven, pues dan cero. Por lo que tomamos los que no se repiten, que son ϵ_{123} , ϵ_{132} , ϵ_{213} , ϵ_{231} , ϵ_{312} , ϵ_{321} . Y ahora, aplicando esto a los delta de Kronecker, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}&\delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3}\epsilon_{123} + \delta_{i1}\delta_{j3}\delta_{k2}\epsilon_{132} + \delta_{i2}\delta_{j1}\delta_{k3}\epsilon_{213} \\ &\delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k1}\epsilon_{231} + \delta_{i3}\delta_{j1}\delta_{k2}\epsilon_{312} + \delta_{i3}\delta_{j2}\delta_{k1}\epsilon_{321}\end{aligned}$$

Ahora les damos valores a los Levi-Civita, recordando la ecuación (1), y nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}&\delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3} - \delta_{i1}\delta_{j3}\delta_{k2} - \delta_{i2}\delta_{j1}\delta_{k3} \\ &+ \delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k1} - \delta_{i3}\delta_{j2}\delta_{k1} + \delta_{i3}\delta_{j1}\delta_{k2}\end{aligned}$$

¿Y esto a qué se parece? Exacto, al determinante de una matriz en \mathbb{R}^3 , por lo que podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Por lo tanto, para el ϵ_{ilm} sería equivalente lo siguiente:

$$\epsilon_{ilm} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{l1} & \delta_{l2} & \delta_{l3} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3} \end{vmatrix} \quad (3)$$

por lo tanto, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}$ se podría ver como $|A||B|$, puesto que ambas son determinantes de dos matrices, pero esto a su vez se puede ver como $|AB|$, de la siguiente manera:

Sea A y B unas matrices $n \times n$, entonces sea C una matriz $n \times n$ de tal forma que $C = AB$.

Entonces sabemos que la matriz A se puede transformar en una matriz A' triangular superior por medio de operaciones

$\hat{o}_1, \hat{o}_2, \dots, \hat{o}_m$ finitas entre filas.

Ahora, sea C' la matriz resultante al usar las operaciones $\hat{o}_1, \hat{o}_2, \dots, \hat{o}_m$ finitas en la matriz C .

Entonces por la conmutatividad de las operaciones elementales entre filas y la multiplicación de matrices, tenemos que $C' = A'B$.

entonces por el efecto de la secuencia de operaciones elementales de fila en el determinante, tenemos que existe un $\lambda \in R$ tal que:

$$\lambda \det(A') = \det(A) \lambda \det(C') = \det(C)$$

Entonces sea B^T la transpuesta de B , entonces de la transpuesta del producto matricial tenemos que $(C')^T = (A'B)^T = B^T(A')^T$.

Luego, a la matriz B^T se le pueden aplicar ciertas operaciones elementales de filas $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_m$ para así convertirla en una matriz triangular inferior.

Entonces aplicando esto a la matriz C , definimos que sea C'' la matriz resultante al aplicarle una serie de operaciones elementales $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_m$ a la matriz $(C')^T$.

Entonces, como se mencionó antes, gracias a la conmutatividad de las operaciones elementales entre filas y la multiplicación de matrices, tenemos que $C'' = (B^T)'(A')^T$.

Y usando el teorema anterior de el efecto de la secuencia de operaciones elementales de fila en el determinante, tenemos que existe un $\beta \in R$ tal que:

$$\beta \det((B^T)') = \det(B^T) \beta \det((C'')) = \det((C')^T)$$

Entonces, como sabemos que la transpuesta de una matriz triangular superior es una matriz triangular inferior, tenemos que $(A')^T$ es una matriz triangular inferior.

Por lo tanto, el producto entre matrices triangulares nos muestra que $(B^T)'(A')^T$ es una matriz triangular inferior en la cuál sus elementos de la diagonal son los productos de los elementos de la diagonal de $(B^T)'$ y $(A')^T$.

Entonces a partir del determinante de una matriz triangular, tenemos que $\det(A')^T$, $\det(B^T)'$ y $\det[((B^T)')((A')^T)]$ son iguales al producto de sus componentes diagonales, por lo que combinando este resultado, tenemos que:

$$\det[((B^T)')((A')^T)] = (\det(B^T)')(\det(A')^T)$$

Entonces utilizando todos los recursos anteriores:

$$\begin{aligned} \det(C) &= \lambda \det(C') \\ &= \lambda \det((C')^T) \\ &= \lambda \beta \det(C'') \\ &= \lambda \beta \det((B^T)'(A')^T) \\ &= \lambda \beta \det((B^T)') \det((A')^T) \\ &= \lambda \det((A')^T) \beta \det((B^T)') \\ &= \lambda \det(A') \det(B^T) \\ &= \det(A) \det(B) \end{aligned}$$

Y como asignamos C como AB , entonces nos queda:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(A) \det(B) \\ |AB| &= |A| |B| \\ |A| |B| &= |AB| \end{aligned}$$

Ahora con este presaber, podemos empezar a demostrar la igualdad del principio, es decir: $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$. Tendremos que usar la ecuación (2) y (3), y al unir las nos queda lo siguiente:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{ji} & \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{ki} & \delta_{kl} & \delta_{km} \end{vmatrix}$$

Teniendo esto, obtengamos el determinante para ver qué nos da, yo personalmente lo hice por el método de Sarrus.

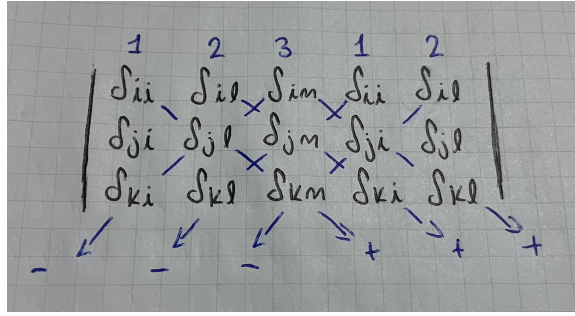


Figura 1: Método de Sarrus hecho a mano, las componentes que están unidas por medio de flechas son multiplicadas, y su signo es determinado por si la flecha termina a la derecha o la izquierda.

Esto nos da la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \delta_{ii}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{ki} + \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kl} \\ & - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{ki} - \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{ji}\delta_{km} \end{aligned}$$

Pero, podemos organizar los términos para así hacerlos más fácil de trabajar y ver:

$$\delta_{ii}(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) + (\delta_{im}\delta_{ji})\delta_{kl} + \delta_{jm}(\delta_{il}\delta_{ki}) - \delta_{jl}(\delta_{im}\delta_{ki}) - (\delta_{il}\delta_{ji})\delta_{km}$$

Ahora podemos trabajar los índices repetidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (\delta_{im}\delta_{ji}) &= \delta_{1m}\delta_{j1} + \delta_{2m}\delta_{j2} + \delta_{3m}\delta_{j3} = \delta_{jm} \\ (\delta_{il}\delta_{ki}) &= \delta_{1l}\delta_{k1} + \delta_{2l}\delta_{k2} + \delta_{3l}\delta_{k3} = \delta_{kl} \\ (\delta_{im}\delta_{ki}) &= \delta_{1m}\delta_{k1} + \delta_{2m}\delta_{k2} + \delta_{3m}\delta_{k3} = \delta_{km} \\ (\delta_{il}\delta_{ji}) &= \delta_{1l}\delta_{j1} + \delta_{2l}\delta_{j2} + \delta_{3l}\delta_{j3} = \delta_{jl} \end{aligned}$$

Ahora debemos recordar que un delta de Kronecker con índices dummies repetidos es igual a tres, y eso se debe a la definición del delta de Kronecker, que es la siguiente:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

Y como tenemos un δ_{ii} , se descompone de la siguiente manera:

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

Y como hay tres delta de Kronecker con índices repetidos, entonces queda $1 + 1 + 1$ y eso sería 3. Ahora podemos empezar a reemplazar en la ecuación resultante del determinante:

$$3\delta_{jl}\delta_{km} - 3\delta_{jm}\delta_{kl} + \delta_{jm}\delta_{kl} + \delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jl}\delta_{km}$$

Ahora lo último que nos queda es restar, dándonos como resultado:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \quad (5)$$

2. $(Ax B) \cdot (Cx D)$

Ahora podemos resolver el producto punto entre dos productos cruz, empecemos definiendo que $(Ax B) = H_i$ y que $(Cx D) = G_i$, así podemos tratarlo como el producto punto entre dos vectores. por lo que tenemos lo siguiente:

$$H_i G_i = (\epsilon_{ijk} A_j B_k)(\epsilon_{ilm} C_l D_m)$$

Como H y G están en dirección i , pues no hay necesidad de escribir la dirección e_i . Ahora podemos organizar la ecuación anterior:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}A_jB_kC_lD_m$$

Y podemos usar la ecuación (5), por lo que la aplicamos:

$$(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})A_jB_kC_lD_m$$

Ahora distribuimos e igualamos índices, pues eso es lo que nos interesa:

$$\begin{aligned} &A_jB_mC_jD_m - A_jB_lC_lD_j \\ &(A_jC_j)(B_mD_m) - (A_jD_j)(B_lC_l) \end{aligned}$$

Ahora lo describimos:

$$(AC)(BD) - (AD)(BC) \quad (6)$$

Y así tenemos nuestro resultado.

3. $(AxB)x(CxD)$

Para hacer esta demostración, partamos de algo que ya conocemos, el triple producto vectorial: Tenemos $Ax(BxC)$, y podemos llamar a (BxC) como un vector G_k , puesto que el producto cruz o producto vectorial da como resultado un vector en una dirección perpendicular a los dos vectores, en este caso en la dirección k .

$$(AxB)x(CxD) \rightarrow G_kx(CxD)$$

$$G_kx(CxD) = \epsilon_{ijk}G_i(CxD)_j$$

$$= \epsilon_{ijk}G_i\epsilon_{jlm}C_lD_m$$

Ahora organizamos un poco

$$\epsilon_{jki}\epsilon_{jlm}G_iC_lD_m$$

Note que nos queda dos ϵ con un índice repetido, y esto como ya hemos demostrado anteriormente, es igual a $(\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})$. Y además, recordemos que G_i es el producto vectorial $(AxB)_i$, entonces remplazemos:

$$\epsilon_{jki}\epsilon_{jlm}G_iC_lD_m = (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})(AxB)_iC_lD_m$$

Entonces podemos descomponer $(AxB)_i$ con un tercer Levi-Civita, con dos índices nuevos, quedando de la siguiente manera:

$$(AxB)_i = \epsilon_{ipq}A_pB_q$$

$$\text{Remplazando} \rightarrow (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})\epsilon_{ipq}A_pB_qC_lD_m$$

Ahora distribuimos C y D :

$$\rightarrow (\delta_{kl}\delta_{im}C_lD_m - \delta_{km}\delta_{il}C_lD_m)\epsilon_{ipq}A_pB_q$$

Note que los delta de Kronecker y los índices de C y D se repiten, por lo que podemos analizar que para que no sean cero, k tiene que ser igual a l , m tiene que ser igual a i , y así sucesivamente para eliminar los delta de Kronecker, por lo que nos queda $(C_kD_i - C_iD_k)\epsilon_{ipq}A_pB_q$.

Ahora distribuimos $\epsilon_{ipq}A_pB_q$ en la resta:

$$C_k\epsilon_{ipq}A_pB_qD_i - D_k\epsilon_{ipq}A_pB_qC_i$$

¿Qué quiere decir esta expresión? Pues mirando los índices, podemos decir que C_k y D_k son vectores aparte, pues su índice no se repite ni se relaciona, pero se están multiplicando, y esto lo relacionamos con el producto escalar o producto punto.

Además, $\epsilon_{ipq}A_pB_qD_i$ y $\epsilon_{ipq}A_pB_qC_i$ son productos vectoriales ó productos cruz, ambos en dirección de D y C respectivamente, pues llevan los índices i . Entonces aplicando estos detalles, nos queda lo siguiente:

$$C_k\epsilon_{ipq}A_pB_qD_i - D_k\epsilon_{ipq}A_pB_qC_i = (C \cdot (AxB))D - (D \cdot (AxB))C \quad (7)$$

Y así tenemos nuestro resultado.

4. Demostración adicional

Se mencionó un teorema durante la demostración de $|AB| = |A||B|$ el cuál se llama el efecto de la secuencia de operaciones elementales de fila en el determinante, que dice lo siguiente:

Sea $\hat{o}_1, \hat{o}_2, \dots, \hat{o}_m$ una secuencia finita de operaciones elementales entre filas.

Entonces existe un escalar $c \in \mathbf{R}$ para cualquier matriz cuadrada A de orden n en \mathbf{R} tal que:

$$\det(A) = c \det(A')$$

Donde A' es una matriz cuadrada de orden n la cuál es el resultado de aplicar las operaciones elementales $\hat{o}_1, \hat{o}_2, \dots, \hat{o}_m$ en la matriz A.

Para probar este teorema, debemos de probarlo para los tres tipos de operaciones elementales entre filas, las cuales son: intercambiar filas, multiplicar una fila por un escalar, y sumar filas.

Primero debemos recordar un teorema del determinante muy importante, el efecto de las operaciones de fila en el determinante, el cuál dice lo siguiente:

Si tenemos A como una matriz cuadrada de orden n y denotamos a $\det(A)$ como el determinante de A, entonces tomamos las tres operaciones elementales entre filas:

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \lambda \mathbf{r}_i \rightarrow \text{multiplicación por un escalar } \lambda \neq 0 \quad (8)$$

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \lambda \mathbf{r}_j \rightarrow \text{suma entre filas} \quad (9)$$

$$\mathbf{r}_i \iff \mathbf{r}_j \rightarrow \text{intercambio entre filas} \quad (10)$$

Entonces al aplicar la ecuación (8), esta tendrá el efecto de multiplicar $\det(A)$ por un escalar λ .

Al aplicar la ecuación (9), esta no tendrá ningún efecto en $\det(A)$.

Al aplicar la ecuación (10), esta tendrá el efecto de multiplicar $\det(A)$ por un (-1) .

Ahora podemos empezar a demostrar el efecto de la secuencia de operaciones elementales de fila en el determinante, por lo que prosigamos; sea $\hat{o}_1, \hat{o}_2, \dots, \hat{o}_m, \hat{o}_{m+1}$ una secuencia finita de operaciones elementales entre filas.

Entonces sea \mathbf{r}_i la i -ésima fila de A.

Sea A' la matriz de orden n que resulta al aplicar la operación elemental \hat{o}_{m+1} a la matriz A.

Entonces A'' es igual a la matriz que resulta al usar las operaciones elementales $\hat{o}_1, \hat{o}_2, \dots, \hat{o}_m, \hat{o}_{m+1}$ en A.

4.1. Multiplicación de una fila por un escalar diferente de cero:

Ahora, suponga que \hat{o}_{m+1} es el tipo de operación elemental de multiplicar una fila por un escalar, $\mathbf{r}_i \rightarrow \alpha \mathbf{r}_i$, donde $\alpha \in \mathbf{R}$ y $i \in (1, 2, \dots, n)$, entonces:

$$\begin{aligned} \det(A) &= c \det(A') \\ &= (c\alpha) \det(A'') \rightarrow \text{Efecto de las operaciones de fila en el determinante} \end{aligned}$$

y como c y α son escalares, pues la multiplicación entre ellos dará como resultado otro escalar.

4.2. Suma entre filas:

Suponga que \hat{o}_{m+1} es el tipo de operación elemental de suma entre filas, $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \alpha \mathbf{r}_j$, donde $\alpha \in \mathbf{R}$ y $i, j \in (1, 2, \dots, n)$, además de que $i \neq j$, entonces:

$$\begin{aligned} \det(A) &= c \det(A') \\ &= c 1_R \det(A'') \rightarrow \text{Efecto de las operaciones de fila en el determinante} \\ &= c \det(A'') \rightarrow \text{Definición de la identidad, pues } \mathbf{R} \text{ conmuta} \end{aligned}$$

4.3. Intercambio entre filas:

Suponga que \hat{o}_{m+1} es el tipo de operación elemental de intercambio entre filas, $\mathbf{r}_i \longleftrightarrow \mathbf{r}_j$, entonces:

$$\begin{aligned} \det(A) &= c \det(A') \\ &= c(-1_R) \det(A'') \rightarrow \text{Efecto de las operaciones de fila en el determinante} \\ &= (-c) \det(A'') \end{aligned}$$

Así queda probado para las tres operaciones elementales entre filas.