

# Fundamentos de cálculo diferencial

Miguel Ascanio

23 de abril de 2023

## 1. Los tres pilares (Matematicos)

### 1.1. Definiciones:

Estructuras matematicas	Objetos
Complejos	Un numero complejo
Esp. Vectorial	Vectores
Cuerpo	Reales, complejos, racionales
Plano $R^2$	Punto, segmento, triangulo

Cuadro 1: Definiciones

### 1.2. Axiomas (postulados):

Propiedades de las estructuras y objetos matematicos (ej. Propiedad de cerradura). Se asumen que son verdaderas.

### 1.3. Teoremas:

Afirmaciones siempre verdaderas de las estructuras y objetos matematicos.

- Leyes
- Proposiciones (requiere una demostracion)

Las demostraciones pueden ser:

- Constructivas
- Existencia ("hallar un elemento")
- Unicidad

Existen las afirmaciones que pueden ser verdaderas, por lo que pasa a ser un "teorema" (si se demuestra). Por otro lado, tambien pueden ser falsas, por lo que pasa a ser un contraejemplo".

## 2. Construcciones axiomática de $\mathbb{R}$

### 2.1. Operación binaria interna

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Como un subconjunto de  $N.N$  (producto cartesiano) que se relaciona con un natural.

$$\begin{aligned} * : N.N &\rightarrow N \\ (a, b) &\rightarrow a * b \end{aligned}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} + : N.N &\rightarrow N \\ (a, b) &\rightarrow a + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - : N.N &\rightarrow N \\ (a, b) &\rightarrow a - b \\ (5, 10) &\rightarrow 5 - 10 \notin N \\ &\text{No es una operación binaria interna} \end{aligned}$$

$$Z = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\begin{aligned} - : N.N &\rightarrow Z \\ (a, b) &\rightarrow a - b \\ &\text{Si es operación binaria pero no interna} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : Z.Z &\rightarrow Z \\ (a, b) &\rightarrow a \cdot b \end{aligned}$$

**Ejercicio de ejemplo:**

¿ Puedo hallar  $a, b \in Z$  tal que  $a.b = 1$  ?

$$a.b = 1 \rightarrow (1).(1) = 1, \quad (-1).(-1) = 1$$

$$\begin{aligned} Q &= \{ \dots - 2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -1, 0, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, \dots \} \\ &= \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, \quad b \neq 0 \} \end{aligned}$$

$$I = \{ \dots \sqrt{2}, e, \pi, 5, \dots \}$$

## 2.2. Axiomas de cuerpo

Se considera un conjunto que se llama “conjunto de numeros reales” deotador por  $R$ . Donde se definen las siguientes operaciones: Suma (+), Producto (.) (deben ser binarios internos) y cumplen las siguientes propiedades:

Sean  $a, b, c \in R$

- **C1.** Propiedad conmutativa  
 $a + b = b + a$              $ab = ba$
- **C2.** Propiedad asociativa  
 $a + (b + c) = (a + b) + c$              $a(bc) = (ab)c$
- **C3.** Propiedad distributiva  
 $a(b + c) = ab + ac$              $(a + b)c = ac + bc$
- **C4.** Existencia de inversos aditivos  
Existe  $-a \in R$  tal que para cada  $a \in R$ , se cumple:  
“  $a + (-a) = (-a) + a = 0$  ”  $\rightarrow$  Módulo para la suma
- **C5.** Existencia de inversos multiplicativos  
Existe  $a^{-1} \in R$  tal que para cada  $a \in R$  se cumple:  
“  $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$  ”  $\rightarrow$  Módulo para el producto
- **C6.** Módulos  
Módulo para la suma es 0 (cero)  
Módulo para el producto es 1 (uno)  
Donde  $1 \neq 0$

**Ejemplos:** Si se cumple C1, C2, C3  $\rightarrow N$   
Si se cumple C1, C2, C3, C4  $\rightarrow Z$   
Si se cumplen todos  $\rightarrow Q, R, I$

**Nota:**  $x^2 + 1 = 0$   
 $x = \sqrt{-1} = i$

$$C = \{ a + bi \mid a, b \in R, \quad i^2 = -1 \}$$

### 2.3. Axiomas de orden

- **O1.** Si  $a, b \in R^+$  ,  $a + b \in R^+$  ,  $ab \in R^+$
- **O2.** Si  $a \in R^+$  entonces  $-(-a) = a \in R^+$
- **O3.** El 0  $\notin R^+$  y tampoco 0  $\notin R^-$  (neutro)  
No cumple C

### 2.4. Axiomas de completitud

- **S1.** Para  $S \subseteq R$ , S sea no vacío y acotado, se cumple que existe  $B \in R$ , tal que " $b > x$  ,  $x \in S$ "  $b = \sup S$   
**Nota:** S1 no lo cumple Q